Skript zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2004/2005

Universität Konstanz
Prof. Dr. Robert Denk

private Mitschrift

Stand: 3. April 2006
www.meidert.net/uni

Achtung:
Dies ist kein offizielles Skript, sondern nur eine private Mitschrift. Ich kann daher keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit übernehmen. Vor allem können die Nummerierungen zum Teil von den in den Vorlesungen verwendeten abweichen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so möge er/sie mir bitte eine eMail schicken - vielen Dank!

Frieder Meidert (uni@meidert.net)

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen und Bezeichnungen

a. Mengen und Abbildungen

Wir gehen von einem intuitiven Mengenbegriff aus. Bsp.: $M = \{1, 2\}$ (explizite Angabe der Elemente) oder $M = \{n | n \text{ ist gerade und natürlich } \}$ (Beschreibung einer Eigenschaft).

Bezeichnungen 1.1.

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen mit Null
$\mathbb{Z} := \{x | x \in \mathbb{N}_0 \text{ } oder \text{ } x - x \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{Q} := \{x | x = \frac{p}{q} \text{ } mit \text{ } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$	rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
$\emptyset = \{\}$	leere Menge

Bezeichnungen 1.2 (Standardbezeichnungen für Mengen)**.**

$x \in M$	x ist Element von M
$M \subset N$	M ist Teilmenge von N (auch $M = N$ möglich)
$M \subsetneq N$	$M \subset N$ und $M \neq N$
$M \cup N$	Vereinigung der Mengen M und N
$M \cap N$	Durchschnitt der Mengen M und N
$M \setminus N$	Differenz der Mengen M und N - "M ohne N"

M und N heißen **disjunkt**, wenn $M \cap N = \emptyset$
Falls $N \subset M \Rightarrow N^C : M \setminus N$ heißt **Komplement** von N in M
Es gelten die üblichen Rechenregeln
z.B. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Definition 1.3 (Abbildungen)**.**
Seien A, B Mengen. Falls zu jedem $x \in A$ genau ein $f(x) \in B$ existiert, so heißt f eine **Abbildung** von A nach B. Wir schreiben $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.
A heißt Definitionsbereich von f.
$f(A) := R(f) := \{y \in B | \text{ } es \text{ } existiert \text{ } mindestens \text{ } ein \text{ } x \in A \text{ } mit \text{ } y = f(x)\}$ heißt Wetebereich (Bezeichnung kommt von engl. „range“).
Falls $C \subset A$, so heißt $f|_C : C \to B, x \mapsto f(x)$ die Restriktion (Einschränkung) von f auf C.
Setze $f(C) := R(f|_C) := \{y \in B | \text{ } es \text{ } existiert \text{ } ein \text{ } x \in C \text{ } mit \text{ } f(x) = y\}$
Zu $D \subset B$ heißt $f^{-1}(D) := \{x \in A | \text{ } es \text{ } existiert \text{ } ein \text{ } y \in D \text{ } mit \text{ } f(x) = y\}$ das Urbild von D unter der Abbildung f.
Achtung: $f^{-1}(D)$ ist nicht die Umkehrfunktion, sondern eine Abbildung von Mengen!

Satz 1.4 (Rechenregeln).
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

(i) *Für $U \subset A$ und $V \subset A$ gilt:*
$f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$ *($\neq$ möglich)*
$f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$
$f(U \setminus V) \supset f(U) \setminus f(V)$ *($\neq$ möglich)*

(ii) *Für $U \subset B$, $V \subset B$ gilt:*
$f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$
$f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$
$f^{-1}(U \setminus V) = f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V)$

(iii) *Komposition von Funktionen:*
Seien $f : A \to B$, $g : C \to D$ mit $f(A) \subset C \subset B$, dann heißt $h = g \circ f : A \to D, x \mapsto g(f(x))$ die Komposition (Verknüpfung von f und g.
Man spricht „g nach f“oder „g Kringel f“.
Es gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Definition 1.5 (Graph).
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt $g(f) : \{(x, f(x)) | x \in A\}$ der **Graph** von f.
Es gilt: $g(f) \subset A \times B := \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ (vgl. Produktmenge)

Definition 1.6 (Eigenschaften von Abbildungen).
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt f

(i) **injektiv**, falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt, $x_1 = x_2$.

(ii) **surjektiv**, falls $f(A) = B$.

(iii) **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

b. Elemente der Logik

Bezeichnungen 1.7.
$\wedge$ - „und“
$\vee$ - „und/oder“
$\neg$ - „nicht“
$\forall$ - „für alle“
$\exists$ - „es existiert (mindestens) ein“
$\exists_1$ - „es existiert genau ein“

Logische Bezeichnungen können über Wahrheitstafeln definiert oder bewiesen werden. Beispiel Implikation: $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Es gilt:
$(A \Rightarrow B) = (\neg A \vee B)$ aus A folgt B
$(A \Leftrightarrow B) := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ A äquivalent zu B

Satz 1.8 (Rechenregeln)**.**
$(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(indirekter Beweis)*
$\neg (\forall x \in M : \mathcal{P}(x)) = \exists x \in M : \neg \mathcal{P}(x)$
$\neg (\exists x \in M : \mathcal{P}(x)) = \forall x \in M : \neg \mathcal{P}(x)$

2. Zahlen

a. Natürliche Zahlen, vollständige Induktion

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ als bekannt voraus. Es gelten die üblichen Rechenregeln.
Auf $\mathbb{N}$ existiert eine Ordnung: $a \leq b := [(a = b) \vee (\exists c \in \mathbb{N} | b = a + c)]$
Damit ist $\mathbb{N}$ vollständig geordnet, d.h. für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt immer $a \leq b \vee b \leq a$.

Bemerkung 2.1 (Axiome der $\mathbb{N}$)**.**
Man kann $\mathbb{N}$ durch Axiome beschreiben (nach Peano):
(A1) $1 \in \mathbb{N}$
(A2) $\forall n \in \mathbb{N} \exists_1 n^+ \in \mathbb{N}$ (n^+ heißt Nachfolger von n)
(A3) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^+ \neq 1$
(A4) $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$
(A5) Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und ($n \in M \Rightarrow n^+ \in M$), dann ist $M = \mathbb{N}$.

Satz 2.2 (Vollständige Induktion)**.**
Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, und für alle $n \geq n_0$ sei $A(n)$ eine Aussage.
Es gelte:

(i) $A(n_0)$ *ist wahr.* *(Induktionsanfang)*

(ii) $\forall n \geq n_0 \Big(A(n) \text{ ist wahr} \Rightarrow A(n+1) \text{ ist wahr}\Big)$ *(Induktionsschritt)*

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Beweis:

(i) sei $n_0 = 1$. Betrachte $M := \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ ist wahr}\}$. Dann ist $1 \in M$ (Induktionsanfang). Zu $n \in M$ ist nach dem Induktionsschritt auch $n + 1 \in M$. Nach Axiom (A5) ist $M = \mathbb{N}$.

(ii) sei $n_0 > 1$. Setze $\widetilde{A}(n) := A(n + n_0 - 1)$, d.h. $A(n_0) = \widetilde{A}(1) \ldots$ Wende (i) an auf $\widetilde{A}$ und erhalte die Aussage für $\widetilde{A}(1), \widetilde{A}(2), \ldots$, d.h. für $A(n_0)$, $A(n_0 + 1) \ldots$ □

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:
Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$ und $a_k \in \mathbb{R}$ für $k = m, m + 1, m + 2, \ldots, n$. Setze

$\sum\limits_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n,$ (Summe)

$\prod\limits_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$ (Produkt)

Für $m > n$ setzen wir die Summe $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k := 0,$ (leere Summe)

das Produkt $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k := 1.$ (leeres Produkt)

□

Satz 2.3 (Summenformel)**.**
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis: (Vollständige Induktion nach n)

(i) $n = 1 : \sum\limits_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ (wahr)

(ii) $n \to n + 1$:
Nach Induktionsvoraussetzung gilt:
$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $(A\,(n))$.
Zu zeigen: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $(A\,(n+1))$.
$\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, d.h. $A\,(n+1)$ gilt.

□

Satz 2.4 (Bernoullische Ungleichung)**.**
Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis: (Vollständige Induktion nach n)

(i) $n = 1$: $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ (wahr)

(ii) $n \to n + 1$:
$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \cdot (1 + x) \geq (1 + nx) \cdot (1 + x) =$
$= (1 + nx + x + nx^2) \geq 1 + (n + 1)\,x.$

□

Definition 2.5 (Binomialkoeffizien)**.**
Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ heißt $\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ der **Binomialkoeffizient** ("n über k").
Für $k \in \mathbb{N}$ heißt $k! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ die Fakultät von k. Setze $0! := 1$.

Lemma 2.6.
Für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:
(a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$
(b) Für $1 \leq k \leq n$ *gilt:* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Beweis:
(a) Beweis (a) sieht man direkt aus der Definition.
(b) $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!} = \frac{(n-1)\ldots(n-k+1)[k+(n-k)]}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$

□

Satz 2.7 (Binomische Formel)**.**
Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}\right)$ *(mit $x^0 = 1$).*

Beweis: (Vollständige Induktion nach n)

(i) $n = 1$:
linke Seite: $(x+y)^1 = x + y$
rechte Seite: $\sum_{k=0}^{1} \left(\binom{n}{k} x^k y^{1-k}\right) = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y + x$ (wahr)

(ii) $n \to n+1$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) \cdot (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^{k+1} y^{n-k} + x^k y^{n-k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k yn + 1 - k \qquad \text{(mit } j = k+1\text{)}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^j y^{n+1-j} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^j yn + 1 - j + y^{n+1} \qquad \text{(mit } j = k+1\text{)}$$

$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum\limits_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right] x^j y^{n+1-j}$

$= \sum\limits_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^j y^{n+1-j}$ $\qquad \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$ (nach Lemma 2.6)

Damit gilt Aussage für $n+1$.

□

Beispiel:
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Satz 2.8 (geometrische Reihe).
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Beweis: (Vollständige Induktion nach n)

(i) $n = 0$: $\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{0} x^k = 1 = \frac{1-x^1}{1-x}$ (wahr)

(ii) $n \to n+1$:
$\sum\limits_{k=0}^{n+1} x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$

□

b. Körperaxiome

Für $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gelten dieselben Rechenregeln. Dies wird formalisiert.

Definition 2.9 (Gruppe).
Eine **Gruppe** ist eine nichtleere Menge G mit einer Verknüpfung
$\circ\colon G \times G \to G, (x, y) \mapsto x \circ y$ mit

(i) $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (Assoziativität)

(ii) $\exists n \in G : x \circ n = n \circ x = x$ (n heißt neutrales Element)

(iii) $\forall x \in G \exists y \in G : x \circ y = y \circ x = n$ (y heißt inverses Element zu x)

(iv) Die Gruppe heißt **abelsch** (oder **kommutativ**), falls gilt:
$\forall x, y \in G : x \circ y = y \circ x$

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +)$ mit neutralem Element 0 und inversem Element -n.
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ mit neutralem Element 1 und inversem Element $\frac{1}{x}$.
Keine Gruppe: $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, da z.B. zu $x = 2$ kein inverses Element existiert.

Definition 2.10 (Körper).
Ein Körper ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen
$+\colon K \times K \to K$, $\cdot\colon K \times K \to K$, so dass gilt:

(i) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.

(ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.

(iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (Distributivgesetz)

Beispiele 2.11.

(i) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ aber nicht $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

(ii) $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ mit $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$, wobei $1 + 1 := 0$, sonst wird $+$ und $\cdot$ wie in $\mathbb{R}$ definiert.

Sei K ein Körper. Wir schreiben $-x$ für das Inverse bezüglich der Addition und $\frac{1}{x} = x^{-1}$ für das Inverse bezüglich der Multiplikation. $ab := a \cdot b$, $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b} = ab^{-1}$, $a - b := a + (-b)$

Lemma 2.12. *Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann gilt:*

(i) *Es gibt nur ein neutrales Element bezüglich "+". Analog für "$\cdot$".*

(ii) *Für alle $a, b \in K$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = b - a$.*

(iii) *Für alle $x \in K$ ist $x \cdot 0 = 0$.*

Beweis:

(i) Sei n ein weiteres (außer 0) neutrales Element bezüglich der Addition. Dann ist $0 = 0 + n = n$ (da 0 und n neutrale Elemente)

(ii) $b - a$ ist Lösung, da $a + (b - a) = a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$ (nach Körperaxiomen)
Sei y eine Lösung, d.h. $a + y = b$. Dann ist $y = 0 + y = a - a + y = a + y - a = b - a$.
Die Lösung ist also eindeutig.

(iii) Sei $x \in K$. Dann ist $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$ (da 0 neutrales Element)
Aber es gilt: $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0$ (da 0 neutrales Element)
Nach (ii) hat die Gleichung $x \cdot 0 + y = x \cdot 0$ (als Gleichung in K) eine eindeutige Lösung. Damit $x \cdot 0 = 0$.

□

Definition 2.13 (geordnete Körper)**.**
Ein Körper K mit einer Ordnung „>" heißt (vollständig) **geordnet**, falls folgende Anordnungsaxiome erfüllt sind:

(i) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen $x > 0$, $x = 0$ oder $0 > x$.

(ii) $\forall x, y \in K : (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x + y > 0$.

(iii) $\forall x, y \in K : (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$.

Man setzt $x > y :\Leftrightarrow x - y > 0$ und $x < y :\Leftrightarrow y > x$, $x \geq y :\Leftrightarrow (x > y) \vee (x = y)$

Lemma 2.14.
Sei K ein geordneter Körper. Dann gilt:

(i) $\forall x \in K \setminus \{0\} : x^2 > 0$ *(damit auch* $1 = 1^2 > 0$*)*.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : n := 1 + \ldots + 1 > 0$ *(n-mal)*

Beweis:

(i) Falls $x > 0$ so ist $x^2 = x \cdot x > 0$ nach Axiom (iii). Falls $x < 0$, so ist $-x > 0$ und damit $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ (nach Axiom (iii))

(ii) Wende n-mal Axiom (ii) an und verwende $1 > 0$.

□

Beispiele 2.15.

(i) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sind geordnete Körper.

(ii) $\mathbb{F}_2$ ist nicht geordnet, weil $2 = 1 + 1 = 0$, Widerspruch zu 2.14 (ii).

(iii) $\mathbb{C}$ ist kein geordneter Körper, weil $i^2 = -1 < 0$.

Lemma 2.16.
Für $x \in \mathbb{R}$ setze

$$|x| := \begin{cases} x & \text{, falls } x \geq 0 \\ -x & \text{, falls } x < 0 \end{cases} \qquad \text{(Betrag oder Absolutbetrag)}$$

(i) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$ *und* $(|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R} : |-x| = |x|$.

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : |xy| = |x| \cdot |y|$ *und (falls* $y \neq 0$*)* $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.

(iv) *Dreiecksungleichung:* $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$.

(v) *Umgekehrte Dreiecksungleichung:* $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \geq ||x| - |y||$.

Beweis:

(i) folgt direkt aus Definition

(ii) folgt direkt aus Definition

(iii) folgt direkt aus Definition

(iv) Aus $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ folgt $x + y \leq |x| + |y|$.
Aus $-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$ folgt $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Also $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(v) Wende (iv) an auf $u := x + y$ und $v := -y$.
$|x| = |u + v| \leq |u| + |v| = |x + y| + |y|$, d.h. $|x + y| \geq |x| - |y|$.
Vertausche x und y: $|x + y| \geq |y| - |x|$. Damit $|x + y| \geq ||x| - |y||$

□

Definition (archimedisch geordnet, wohlgeordnet)
Ein geordneter Körper K heißt **archimedisch geordnet**, falls:
$\forall x, y \in K, x > 0, y > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x > y$ (beachte $n := 1 + \ldots + 1 \in K$).
Eine geordnete Menge M heißt **wohlgeordnet**, wenn jede nichtleere Teilmenge von M ein kleinstes Element besitzt.

Beispiele: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind archimedisch geordnet.
$\mathbb{N}$ sind wohlgeordnet, aber $\mathbb{R}$ (mit der üblichen Ordnung) ist nicht wohlgeordnet, denn z.B. $(0, 1] := \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$ hat kein kleinstes Element.

c. Die reellen Zahlen

Definition 2.17 (Beschränktheit).
Sei K ein geordneter Körper (z.B. $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$).

(i) Eine Menge $M \subset K$ heißt von unten beschränkt, falls $\exists a \in K \, \forall x \in M : a \leq x$.
In diesem Fall heißt a eine untere Schranke von M.
M heißt von oben beschränkt, falls $\exists a \in K \, \forall x \in M : a \geq x$. ($A$ obere Schranke)
M heißt beschränkt, falls M von unten und von oben beschränkt ist.

(ii) $c \in K$ heißt größte untere Schranke, oder Infimum von M, falls

(a) c ist untere Schranke.

(b) Falls a untere Schranke ist, so ist $a \leq c$.

Man schreibt $c =: \inf M$ (falls es existiert).

(iii) Analog $\sup M$ (Supremum von M, kleinste obere Schranke)

Bemerkungen

(i) Die größte untere (und die kleinste obere) Schranke ist eindeutig. [Denn seien c_1, c_2 größte untere Schranken. Dann folgt aus 2.17 (ii) 2 $c_1 \leq c_2$ und $c_1 \geq c_2$.]

(ii) **Achtung:** Es muss nicht $\sup M \in M$ gelten!
(z.B. $\sup\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\} = 1$).
Falls $\sup M \in M$, so heißt $\sup M$ auch das Maximum von M, $\max M$.
Analog $\min M$.
Beispiele:
$\max\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\}$ existiert nicht.
$\min\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\} = \inf\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 1\} = 0$.

(iii) **Achtung:** Auch das $\sup M$ muss nicht existieren, z.B. existiert $\sup \mathbb{N}$ nicht.
Es gilt (ohne Beweis): $\{q \in \mathbb{Q} | q \geq 0 \text{ und } q^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$ besitzt kein Supremum.
Im folgenden schreiben wir für $a < b, a, b \in \mathbb{R}$:
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$,
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$,
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$, usw.
Analog für $a = -\infty, b = \infty$: z.B. $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$, usw.

Satz 2.18 (Vollständigkeitsaxiom).
Jede nicht leere von oben [unten] beschränkte Menge $S \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum [Infimum] in $\mathbb{R}$.

Bemerkungen 2.19.

(a) Es gibt kein $r \in \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq r$.

(b) Falls für $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a < \frac{1}{n}$, dann ist $a = 0$.

(c) Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$.

(d) Im Beweis von (c) haben wir gesehen: Sei $a = \sup S$. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in S : a - \varepsilon < x \leq a$.

Beweis:

(a) Angenommen, es gibt ein $r \in \mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq r$.
Dann ist $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, d.h. $c := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ existiert (nach Vollständigkeitesaxiom). Wegen $c - 1 < c$ ist $c - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c - 1 < n_0 \leq c$. Dann ist $n_0 + 1 > c$, d.h. c ist keine obere Schranke $\rightarrow$ Widerspruch.

(b) Angenommen, $a > 0$.
Dann ist $\forall n \in \mathbb{N}\ n < \frac{1}{a}$, Widerspruch zu (a).

(c) Sei $S := \{x \in \mathbb{R}_0^+ | x^2 \leq 2\}$ mit $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$. Dann ist $S \neq \emptyset$ und z.B. durch die Zahl 2 beschränkt, denn $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4 > 2$.
Sei $a := \sup S$ (nach 2.18). Wir zeigen $a^2 = 2$.

  (i) Angenommen $a^2 < 2$. Dann $2 - a^2 > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2a+1}{2-a^2} < n$
  Dann $(a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a+1}{n} < 2$
  D.h. a ist keine obere Schranke von S, Widerspruch.

  (ii) Angenommen, $a^2 > 2$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2a}{a^2-2} < n$
  Dann ist $(a - \frac{1}{n})^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} > a^2 - \frac{2a}{n} > 2$, d.h. a ist nicht die kleinste obere Schranke, Widerspruch.

□

Lemma 2.20.
*Zu jedem $r \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \varepsilon$. („$\mathbb{Q}$ **liegt dicht** in $\mathbb{R}$")*

Beweis:
Sei $r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

(i) Sei $r \geq 0$ und $M := \{m \in \mathbb{N} | m > r \cdot n\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$.
Sei m_0 das kleinste Element in M ($\mathbb{N}$ ist wohlgeordnet). Dann ist $m_0 - 1 \leq r \cdot n < m_0$, d.h. $\frac{m_0-1}{n} \leq r < \frac{m_0}{n} := q$.
Somit $|q - r| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(ii) Sei $r < 0$. Wähle $\widetilde{q} \in \mathbb{Q}$ mit $|\widetilde{q} - (-r)| < \varepsilon$ und setze $q := -\widetilde{q}$.

□

Insgesamt ist $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper, der $\mathbb{N}$ und damit $\mathbb{Q}$ enhält und in dem das Vollständigkeitsaxiom gilt. Damit ist $\mathbb{R}$ auch schon (bis auf eine lineare bijektive Abbildung) eindeutig festgelegt.

d. Komplexe Zahlen

In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = -2$ keine Lösung. Dafür benötigen wir die komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$).

Definition ($\mathbb{C}$)
Zu Tupel $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiere:
$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
$x \cdot y := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.
Man rechnet direkt nach, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper ist mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$. Das Inverse ist
$x^{-1} = \left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)$ für $x \neq (0, 0)$.
Dieser Körper heißt der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
Durch $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ wird der Absolutbetrag definiert mit den gleichen Eigenschaften wie in $\mathbb{R}$. Definiere $\overline{x} := (x_1, -x_2)$ als die **konjugiert komplexe Zahl**.
Setze $Rex := x_1$ (**Realteil** von x),
$Imx := x_2$ (**Imaginärteil** von x).
Es gilt:
$x = \overline{\overline{x}}, (x_1, 0) = \frac{1}{2}(x + \overline{x}), (0, x_2) = \frac{1}{2}(x - \overline{x}), x \cdot \overline{x} = |x|^2, |Rex| \leq |x|, |Imx| \leq |x|, \overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$
Man sieht an der Definition, dass für Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$ mit $x_2 = y_2 = 0$ dieselben Rechenregeln gelten wie in $\mathbb{R}$, z.B. $(x_1, 0)^{-1} = \left(\frac{1}{x_1}, 0\right)$
Man kann daher $\mathbb{R}$ mit der Menge $\{x \in \mathbb{C} | x_2 = 0\}$ identifizieren.
z.B. $2 = (2, 0)$.
Definiere $i := (0, 1)$.
Dann ist $i^2 = (-1, 0) = -1$.
i heißt die **imaginäre Einheit**.
Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}$ gilt $x = (x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, 0) \cdot (1, 0) + (x_2, 0) \cdot (0, 1) = x_1 + i \cdot x_2$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
$x = Rex + i \cdot Imx$.
Mit dieser Darstellung wird Rechnen in $\mathbb{C}$ <u>ganz</u> einfach (!):
Man rechnet wie in $\mathbb{R}$ mit Zahlen der Form $x_1 + ix_2$ und verwendet $i^2 = 1$.
z.B. $x^2 = x_1^2 - x_2^2 + i \cdot 2x_1 x_2$.
In neuer Schreibweise: $Rex = \frac{1}{2}(x + \overline{x}), \overline{x}x_1 - ix_2, Imx = \frac{1}{2i}(x - \overline{x})$.
Nachweis der Deiecksungleichung:
$|x + y|^2 = (\overline{x + y}) \cdot (x + y) = (\overline{x} + \overline{y})(x + y) = \overline{x}x + \overline{x}y + \overline{y}y + \overline{y}x = |x|^2 + \overline{y}x + \overline{\overline{x}y} + |y|^2 = |x|^2 + 2Re(x\overline{y}) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$. Damit $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Die Zahl $x = \sqrt{2} \cdot i \in \mathbb{C}$ ist Lösung von $x^2 = -2$.
Beachte, dass wegen $i^2 = -1$ der Körper $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden kann (Lemma 2.14).

Komplexe Zahlenebene
vielleicht komme ich irgendwann mal dahinter, wie man so schöne Bildchen mit Latex erzeugen kann ;-) ...

e. Endlichkeit und Abzählbarkeit

Definition 2.21 (gleichmächtig, endlich, unendlich, abzählbar, . . .).

(i) Zwei Mengen A und B heißen „**gleichmächtig**“ (sind von gleicher Kardinalität), falls eine bijektive Abbildung von A auf B existiert. Man schreibt in diesem Fall: $|A| = |B|$ oder $\sharp A = \sharp B$.
($\sharp A =: card(A) =: |A|$)

(ii) Eine Menge A heißt ...

- **endlich**, falls $A = \emptyset$ ($\sharp\emptyset := 0$) oder $\sharp A = \sharp\{1, \dots, n\} := n$ für $n \in \mathbb{N}$.
- **unendlich**, falls A nicht endlich ist.
- **abzählbar**, falls $\sharp A = \sharp\mathbb{N} =: \aleph_0$
- **höchstens abzählbar**, falls A endlich oder abzählbar.
- **überabzählbar**, falls A weder endlich noch abzählbar ist.

Satz 2.22.

(a) Jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge A ist wieder abzählbar.

(b) Seien A_n abzählbar für $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n =: M$ abzählbar.

(c) Sei A höchstens abzählbar und für alle $a \in A$ sei B_a höchstens abzählbar. Dann ist $\bigcup\limits_{a\in A} B_a =: M$ höchstens abzählbar.

(d) Seien A, B abzählbar, dann ist auch $C := A \times B$ abzählbar.

Beweis:

(a) Sei $F : \mathbb{N} \to A$ bijektiv, also $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ ($f(n) = x_n$).
Sei $E \subset A$ unendlich. Wir wählen iterativ:

(i) $n_1 \in \mathbb{N}$ sei die kleinste Zahl mit $f(n_1) = x_{n_1} \in E$.

(ii) Seien nun $n_1, \dots, n_{k-1}$ bereits gewählt, dann sei n_k die kleinste Zahl größer als $n_1, \dots, n_{k-1}$: $x_{n_k} \in \varepsilon$

Dann ist $g : \mathbb{N} \to E, k \mapsto x_{n_k}$ bijektiv.

(b) $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$ $\begin{pmatrix} a_{11} \rightarrow & a_{12} \swarrow & a_{13} \rightarrow & \dots \\ a_{21} \downarrow & a_{22} \nearrow & a_{23} & \dots \\ a_{31} \nearrow & a_{32} & a_{33} & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

Da in (*) manche Elemente mehrfach auftreten können, folgt
$\exists T \subset \mathbb{N} : \sharp T = \sharp M$
$\Rightarrow M$ höchstens abzählbar. Da $A_1 \subset M$ ist, ist M abzählbar.

(c) analog zu (b).

(d) $C = \bigcup_{a \in A} \bigcup_{b \in B} \{(a, b)\} = \bigcup_{a \in A} B_a$, dann (c) bzw. (b).

□

Beispiele 2.23.

(a) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

(b) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

(c) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis:

(a) $f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ -(\frac{n-1}{2}) & \text{, falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

1	2	3	4	5	6	...
0	1	−1	2	−2	3	...

(b) $\mathbb{Q} = \{\frac{z}{n} | (z, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ ist nach 2.22 (d) abzählbar.

(c) zu zeigen: $(0,1)$ überabzählbar.
Sei $(0,1)$ abzählbar, also $(0,1) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.
Dezimaldarstellung:
$x_1 = 0, x_{11}x_{12}x_{13}\ldots$
$\vdots$
$x_n = 0, x_{n1}x_{n2}x_{n3}\ldots$

Definiere $y \in (0,1)$ mit $y = 0, y_1y_2y_3\ldots$ wobei
$$y_k := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x_{kk} = 1 \\ 1 & \text{, falls } x_{kk} \neq 1 \end{cases}$$
$\Rightarrow \forall k$: $y_k \neq x_{kk}$, also $y \neq x_k \to$ Widerspruch.

□

Notation
$\sharp\mathbb{N} = \aleph_0$
$\sharp\mathbb{R} =: \aleph = 2^{\aleph_0}$

3. Folgen und Reihen

a. Folgen und Grenzwerte

Definition 3.1 (Folge)**.**
Eine **Folge** von Elementen in M ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to M, n \mapsto m_n$. Wir schreiben dafür $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ oder auch $(m_n)_n$.
Für $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$ sprechen wir von **Zahlenfolgen**.
Im Folgenden beschränken wir uns auf diese Zahlenfolgen.

Definition 3.2 (Cauchy-Folge, konvergent, divergent)**.**

(a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge**, genau dann wenn gilt:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0(\varepsilon)$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

(b) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent**, genau dann wenn a existiert mit
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.
Dann heißt a Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $a =: \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$

(c) Eine Folge heißt **divergent**, falls sie nicht konvergent ist.

Beispiele 3.3.

(a) $a_n := 1$ für alle n. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, denn $|a_n - a_m| = 0$ für alle n, m. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(b) $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist eine Cauchy-Folge, denn $|a_n - a_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) < \varepsilon$ falls $n, m \geq n_0$ mit $n_0 < \frac{2}{\varepsilon}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert 0. Eine solche Folge heißt **Nullfolge**.

(c) $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist keine Cauchy-Folge: wähle $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Es ist $|a_n - a_m| \geq 1$ für alle n, m mit $n \neq m$. Daher ist für kein n_0 $|a_n - a_m| < \varepsilon$ $(n, m \geq n_0)$. $(a_n)_n$ ist nicht konvergent.

(d) Aus dem gleichen Grund ist $a_n := (-1)^n$ divergent und keine Cauchy-Folge.

Lemma 3.4.

(a) *Jede konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.*

(b) *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt, d.h.* $\exists c \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$*:* $|a_n| \leq c$*.*

(c) *Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.*

Beweis:

(a) Seien a, a' Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist für alle $\varepsilon > 0$ $|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a' - a_n| < \varepsilon$ falls $n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), n_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. D.h. $a = a'$.

(b) Wähle $\varepsilon > 0$. Dann $\forall n \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$ $(a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon)$.
Setze $c := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |a_{n_0} - \varepsilon|, |a_{n_0} + \varepsilon|\}$.
Dann ist $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m|$ $\qquad (\lim a_n = a)$
$\leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

□

Definition 3.5 (Monotonie)**.**
Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt

- **monoton wachsend**, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$
- **streng monoton wachsend**, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
- **monoton fallend**, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$
- **streng monoton fallend**, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

Satz 3.6.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *monoton wachsend und beschränkt. Dann konvergiert* $(a_n)_n$ *gegen* $\sup\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Beweis:
Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Nach Bemerkung 2.19 (d) existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$.
Da $(a_n)_n$ monoton ist, folgt $a - \varepsilon < a_n \leq a$ für alle $n \geq n_0$, d.h. $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

□

Satz 3.7 (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$)**.**
Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Beweis:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge. Nach 3.4 (b) ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. $\exists k \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N} : -k \leq a_n \leq k$. Sei $c_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$.
Dann gilt: $c_n \leq c_{n+1} \leq \ldots \leq k$. Nach Satz 3.6 ist diese Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c := \sup\{c_1, c_2, \ldots\}$. Es gilt

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3}$ (da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge)

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1\ \forall n \geq n_1 : |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}$ (da $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent)

- $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k(n) \geq n : |c_n - a_{k(n)}| < \frac{\varepsilon}{3}$ (nach Bemerkung 2.19 (d))

  Für $n \geq n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ gilt $|a_n - c| \leq |a_n - a_{k(n)}| + |a_{k(n)} - c_n| + |c_n - c| < \varepsilon$, d.h. $a_n \to c$.

□

Beispiele 3.8.
Sei $p > 0$ und $a_n := p^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Falls $p < 1$, gilt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, denn: sei $p = \frac{1}{1+r}$ mit $r > 0$. Dann ist $a_n = \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \leq \frac{1}{1+nr} \to 0$ $(n \to \infty)$. (nach Bernoulli)

(b) Falls $p = 1$, ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) Falls $p > 1$, gilt $a_n \to \infty$, d.h. $\forall R \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n \geq R$.
Denn: sei $p = 1 + r$, $r > 0$. Dann $a_n = (1 + r)^n \geq 1 + nr \to \infty$. (nach Bernoulli)
Man sagt auch a_n divergiert bestimmt gegen ∞.

Satz 3.9.
*Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$.
Dann gilt:*

(a) $a_n \pm b_n \to a \pm b$

(b) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

(c) *Sei* $b \neq 0$, *und* $c_n := \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & \text{, falls } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{, ansonsten.} \end{cases}$
Dann $c_n \to \frac{a}{b}$

Beweis:

(a) $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.

(b) $(b_n)_n$ ist beschränkt nach Lemma 3.4, etwa $|b_n| \leq M$.
$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + (b_n - b)a| \leq |a_n - a| \cdot M + |b_n - b| \cdot |a| \to 0$

(c) Ohne Einschränkung sei $a_n = 1$ (allgemeiner Fall folgt mit (b)).
Für $n \geq n_0\left(\frac{|b|}{2}\right)$ gilt $|b| - |b_n| \leq |b_n - b| \leq \frac{|b|}{2}$, d.h. $0 < |b| \leq 2|b_n|$.
Damit für $n \geq n_0 : |c_n - \frac{1}{b}| = |\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b_n - b}{b_n b}| \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| \to$.

$\square$

Lemma 3.10.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, d.h. $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < \ldots$. Dann gilt:

(a) *Falls* $a_n \to a$ $(n \to \infty)$, *so auch* $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$.

(b) *Falls* $(a_n)_n$ *konvergent ist und* $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$, *dann auch* $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

Beweis:

(a) folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

(b) folgt aus (a) und der Eindeutigkeit des Grenzwertes, angewendet auf die Teilfolge.

□

Satz 3.11.
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *beide konvergent mit* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Insbesondere folgt für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *mit* $c_1 \leq a_n \leq c_2$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$: $c_1 \leq a \leq c_2$.

Beweis:
Angenommen, $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n > b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Setze $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$.
$\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \varepsilon$. D.h. für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$: $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$, Widerspruch zur Annahme.

□

Achtung:
Aus $a_n > b_n$ folgt $\lim a_n \geq \lim b_n$, aber **nicht unbedingt** $\lim a_n > \lim b_n$.
z.B. $a_n := \frac{1}{n}$, $b_n := 0$.

b. Reihen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Dann heißen $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ die n-te **Partialsumme**.

Definition 3.12.
Die Reihe $\sum a_k$ heißt **konvergent**, falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergent ist. In diesem Fall schreiben wir $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Bemerkung
Für $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gilt:
$\sum a_k$ ist genau dann konvergent, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m \geq n_0 : |\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$
(Cauchy-Kriterium für $(a_n)_n$).

Satz 3.13.
Falls $\sum a_k$ konvergent ist, so folgt $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht! z.B. divergiert die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{k}$.

Beweis:
(i) Für alle $\varepsilon > 0$ und $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon$.
(ii) Divergenz der harmonischen Reihe:
Sei $a_k = \frac{1}{k}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$.
Wähle $m := n_0$, $n := 2n_0$. Dann gilt:
$|s_m - s_n| = \sum\limits_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} \geq \sum\limits_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0} = n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}$. Also ist $(s_n)_n$ keine Cauchy-Folge, also nicht konvergent.
Anschaulich:

$$\underbrace{1}_{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \ldots >$$

□

Beispiel 3.14 (geometrische Reihe)**.**
Es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, falls $|q| < 1$. Für $|q| \geq 1$ divergiert die geometrische Reihe.
Für $|q| < 1$ gilt nach Satz 2.8: $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}$ $(n \to \infty)$.
Für $|q| \geq 1$ ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge.

Definition 3.15 (absolut konvergent)**.**
Eine Reihe $\sum a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum |a_k|$ konvergent ist.

Satz 3.16.
Falls $\sum a_k$ absolut konvergiert, dann ist $\sum a_k$ konvergent.

Beweis:
$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \to 0 \ (n, m \to \infty) \qquad \text{(Cauchy-Folge)}$$
□

Satz 3.17 (Majorantenkriterium)**.**
*Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $|a_n| \leq b_n$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent. (In diesem Fall heißt $(b_n)_n$ eine **konvergente Majorante** von $(a_n)_n$.) Dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.*

Beweis:
$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k \to 0 \text{ für } n, m \to \infty. \qquad \text{(Cauchy-Folge)}$$
□

Korollar 3.18.

(a) ***Quotienten-Kriterium**: Falls*
$\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k : a_n \neq 0$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1$,
so konvergiert $\sum a_n$ absolut.

(b) ***Wurzel-Kriterium**: Falls*
$\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$,
so konvergiert $\sum a_n$ absolut.

Beweis:

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $|a_{n+k}| \leq q^n \cdot |a_k|$, d.h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{k+n}$ hat die konvergente Majorante $|a_k| \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

(b) Für $n \geq k$ folgt $|a_n| \leq q^n$, d.h. $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ hat die konvergente Majorante $\sum\limits_{n=k}^{\infty} q^n$.

□

Bemerkung:
Bei der Konvergenz einer Folge oder Reihe macht die Änderung endlich vieler Folgenglieder keinen Unterschied!

Achtung:
Es reicht nicht, wenn $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$!
z.B. harmonische Reihe: $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n}{n+1}$. Es gibt kein $q < 1$ mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$.

Bemerkung 3.19.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum a_n$ genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen beschränkt ist.

Satz 3.20 (Leibniz-Kriterium)**.**
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_n \geq 0$ monoton fallend mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Mit diesem Satz folgt, dass
$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert.
Aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, d.h. $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert nicht absolut.

Beweis:
Für $m \in \mathbb{N}$ ist

$$s_{2m+2} = s_{2m} + \underbrace{(-a_{2m+1} + a_{2m+2})}_{\leq 0} \leq s_{2m}$$

$$s_{2m+3} = s_{2m+1} + \underbrace{(a_{2m+2} - a_{2m+3})}_{\geq 0} \geq s_{2m+1}$$

Wegen $s_{2m} \geq s_1$ und $s_{2m+1} \leq s_2$ sind beide Teilfolgen monoton und beschränkt, also konvergent. (Bemerkung 3.19). Wegen $s_{2m+1} - s_{2m} = -a_{2m+1} \to 0$ haben beide den gleichen Grenzwert s, also
$\forall \varepsilon > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall m \geq m_0 : |s_{2m} - s| + |s - s_{2m+1}| < \varepsilon$
Wegen Monotonie folgt $|s_n - s| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon) := 2m_0$.

□

Bemerkung:
Wir haben sogar gesehen: es gilt $|s_n - s| \leq |a_{n+1}|$, d.h. der Grenzwert liegt im Inter-

vall $[s_n - |a_{n+1}|, s_n + |a_{n+1}|]$.

Satz 3.21 (Großer Umordnungssatz)**.**
Sei $\sum a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit Grenzwert s.
Dann konvergiert jede Umordnung von $\sum a_n$ ebenfalls gegen s.
D.h.: Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ gegen s.

Beweis:
Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Zu zeigen $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} a_{\varphi(k)} = s$.
Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum |a_n|$ konvergiert, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Damit $\left| s - \sum\limits_{k=1}^{n_0-1} a_k \right| = \left| \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum\limits_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\{\varphi(1), \dots, \varphi(N)\} \supset \{1, \dots, n_0 - 1\}$
Dann gilt für $m \geq \mathbb{N}$: $\left| \sum\limits_{k=1}^{m} a_{\varphi(k)} - s \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{m} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \right|}_{\leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k - s \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$

□

c. Exponentialreihe

Definition und Satz 3.22.
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die **Exponentialreihe** $\exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *absolut konvergent. Wir setzen* $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. *(**Eulersche Zahl**)*

Beweis:
Es gibt $\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$ für $n \geq 2|x|$
Damit folgt die absolute Konvergenz aus dem Quotienten-Kriterium.
□

Satz 3.23 (Cauchy-Produkt von Reihen)**.**
Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergente Reihen. Für* $n \in \mathbb{N}$ *setze* $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. *Dann ist* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut konvergent, und* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$.

Beweis:
Sei $A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_n$, $C_n^* := \left(\sum_{k=0}^{n} a_n \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_n \right)$.
Nach Satz 3.9 gilt $C_n^* \to AB (n \to \infty)$.
(i) Wir zeigen: $\lim_{n\to\infty} (C_n - C_n^*) = 0$

Es ist $C_n^* = \sum_{i,j \in \{0,\ldots,n\}} a_i b_j$, $C_n = \sum_{i,j \in \{0,\ldots,n\}, i+j \leq n} a_i b_j$ (denn $C_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} a_i b_j$)
Also: $C_n^* - C_n = \sum_{i,j \in M_n} a_i b_j$ mit $M_n := \{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2 : i \leq n, j \leq n, i + j > n\}$

Sei $P_n := (\sum_{k=0}^{n} |a_k|) \cdot (\sum_{k=0}^{n} |b_k|) = \sum_{i,j \in \{0,\ldots,n\}} |a_i b_j|$.
Nach Satz 3.9 konvergiert $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 | P_n - P_m < \varepsilon$. Aber $P_n - P_{n_0} = \sum_{(i,j) \in K_n} |a_i b_j| (n > n_0)$ mit $K_n := \{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2 : i \leq n, j \leq n\} \setminus \{(i,j) \in \mathbb{N}_0^2 : i \leq n_0, j \leq n_0\}$.
Für $n > 2n_0$ ist $M_n \subset K_n$.
Damit gilt für $n > 2n_0$:
$|C_n^* - C_n| \leq \sum_{(i,j) \in M_n} |a_i b_j| \leq \sum_{(i,j) \in K_n} |a_i b_j| < \varepsilon$.
(ii) Wir zeigen die absolute Konvergenz:
Sei $a'_n := |a_n|$, $b'_n := |b_n|$, $c'_n := \sum_{k=0}^{n} a'_{n-k} b'_k$. Nach Teil (i) ist $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n$ konvergent.
Aber $|c_n| = |\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}| \cdot |b_k| = \sum_{k=}^{n} a'_{n-k} b'_k = c'_n$.

Somit ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c'_n$ eine konvergente Majorante zu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

□

Satz 3.24 (Funktionalgleichung der Exponentialreihe)**.**
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Beweis:
Wende Satz 3.23 an auf $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\exp(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$
$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \frac{1}{n!}(x + y)^n$
Damit $\exp(x + y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x + y)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \exp(x)\exp(y)$.

□

Korollar 3.25.

(a) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist* $\exp(x) > 0$.

(b) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

(c) *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist* $\exp(x) = e^n = (\exp(1))^n$.

Beweis:

(a) Für $x \geq 0$ ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \geq 1 > 0$.
Für $x < 0$ ist $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$, d.h. $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$

(b) siehe (a)

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ folgt dies direkt aus der Funktionalgleichung (formal: vollständige Induktion nach n). Für $n < 0$ verwende (b).

□

4. Einige nützliche Prinzipien

a. Normierte Räume

Der Betrag in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ sind Beispiele von **Normen**.

Definition 4.1 (Vektorraum)**.**
Sei K ein Körper. Dann heißt eine Menge V mit zwei Abbildungen $+ : V \times V \to V$ (Addition), $\cdot : K \times V \to V$ (Skalarmultiplikation) ein K-Vektorraum, falls

(i) $(V, +)$ ist abelsche Gruppe.

(ii) Für alle $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in K$: $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $1 \cdot x = x$.

Beipiele

(a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ (siehe Lineare Algebra)

(b) Die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$, mit $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.

Definition 4.2 (Norm)**.**
V sei K-Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Dann heißt eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ eine **Norm** auf V, falls:

(a) $\forall x \in V$: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(b) $\forall x \in V\ \forall \alpha \in K$: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

(c) (Dreiecksungleichung) $\forall x, y \in V$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Beispiele 4.3.

(a) $V = \mathbb{R}$ oder $V = \mathbb{C}$ mit dem Betrag als Norm.

(b) $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$ mit $\|x\| := \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (euklidische Norm)

(c) $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$ mit der Maximumsnorm $||x|| := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ (heißt auch l^∞-Norm), $||x||_\infty := ||x||$.

Definition 4.4 (offene Kugel)**.**
Sei V normierter Vektorraum. Für $x_0 \in V, r > 0$ heißt $B(x_0, r) := \{x \in V : ||x_0 - x|| < r\}$ die **offene Kugel** (Ball) um x_0 mit Radius r.
Im Beispiel 4.3 (c) ist $B(0, 1)$ das offene Quadrat mit Kantenlänge 2 ($n = 2$).

Definition 4.5 (vollständig, Banachraum)**.**
Sei V ein normierter K-Vektorraum.

(a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ heißt Cauchy-Folge, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) : ||x_n - x_m|| < \varepsilon$.
Analog definiert man Konvergenz.

(b) V heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in V besitzt. In diesem Fall heißt V ein **Banachraum**.

b. Topologische Grundbegriffe

Im folgenden sei V ein normierter K-Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition 4.6 (innerer Punkt, offene/abgeschlossene Mengen, Häufungspunkt, Abschluss)**.**

(a) Sei $M \subset V$. Dann heißt $x \in M$ ein **innerer Punkt** von M, falls $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset M$.

(b) M heißt **offen**, falls jedes $x \in M$ innerer Punkt ist.
M heißt **abgeschlossen**, falls $V \setminus M$ offen ist.

(c) Sei $M \subset V$. Dann heißt $x_0 \in V$ ein **Häufungspunkt** von M, falls $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in M \setminus \{x_0\} : \|x - x_0\| < \varepsilon$.

(d) Der **Abschluss** $\overline{M}$ von M in V ist definiert als die Vereinigung von M und der Menge $\{x \in V : x \text{ ist Häufungspunkt von } M\}$.

Bemerkung (isolierter Punkt)

- 0 ist Häufungspunkt von $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. Ein Häufungspunkt muss nicht in M liegen.

- Es gilt: x_0 ist Häufungspunkt von $M \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M \setminus \{x_0\} : x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$. Häufungspunkte sind also alle Grenzwerte von Folgen in M.

- Ein Punkt $x_0 \in M$, der kein Häufungspunkt von M ist, heißt **isolierter Punkt** von M.

Satz 4.7 (von Bolzano-Weierstraß)**.**
Jede unendliche beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt (mindestens) einen Häufungspunkt.

Beweis:
Seien $\{x_1, x_2, \ldots\}$ verschiedene Punkte in M und $c_n := \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Dann gilt (siehe Beweis von Satz 3.7) $c_n \to c := \sup\{c_1, c_2, \ldots\}$ $(n \to \infty)$, und c ist Häufungspunkt von M.

□

Definition 4.8 (Limes Superior, Limes Inferior).
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge.

(a) Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

(b) Sei A die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann heißen (falls sie existieren)
$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} = \sup A$
der **Limes Superior** von $(a_n)_n$, und
$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} = \inf A$
der **Limes Inferior** von $(a_n)_n$.

Bemerkung 4.9.

(a) Falls sie existieren, sind $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ selbst wieder Häufungspunkte (größter bzw. kleinster Häufungspunkt).

(b) Falls $(a_n)_n$ beschränkt ist, existieren $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$.
Es gilt $(a_n)_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(a_n)_n$ besitzt nur einen Häufungspunkt $\Leftrightarrow$ $\limsup a_n = \liminf a_n$.

(c) Sei $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$. Dann ist $a \in \mathbb{R}$ genau dann Häufungspunkt, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert mit $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$.

Beispiele 4.10.

(i) $a_n := n$ besitzt keinen Häufungspunkt, und damit existieren auch $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ nicht.

(ii) $a_n := (-1)^n$ hat die Häufungspunkte $\{+1, -1\}$, und $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$.

c. Kompaktheit

Wieder sei V ein normierter K-Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.
Sei Λ eine beliebige Indexmenge und $\mathcal{U} := \{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\mathcal{U}_\lambda$ offen.

Definition 4.11 (offene Überdeckung, kompakt)**.**

(a) $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ heißt eine **offene Überdeckung** von $M \subset V$, falls $\forall x \in M$ $\exists \lambda \in \Lambda : x \in \mathcal{U}_\lambda$ ($\Leftrightarrow M \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$), $\mathcal{U}_\lambda$ offen.

(b) $M \subset V$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.
D.h. falls $M \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$ eine offene Überdeckung ist, existieren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ mit $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\lambda_i}$.

Satz 4.12.
Sei $M \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist M beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:

(a) $M \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (-n, n)$ $(= \mathbb{R}) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B(0, n)$ ist eine offene Überdeckung. Nach Voraussetzung ist M kompakt, d.h. es existiert eine endliche Teilüberdeckung
$M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{K} (-n_k, n_k) = (-N, N)$, $N := \max\limits_k\{n_k\}$.
Also gilt $|x| < N$ für alle $x \in M$, d.h. M ist beschränkt.

(b) Zu zeigen: $\mathbb{R} \setminus M$ ist offen. Sei $x \in \mathbb{R} \setminus M$ ($\neq \emptyset$ nach (i)).
Zu jedem $m \in M$ definiere $\varepsilon_m := \frac{1}{4}|x - m|$. Dann ist $M \subset \bigcup\limits_{m\in M} B(m, \varepsilon_m)$ eine offene Überdeckung von M. Da M kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(m_k, \varepsilon_{m_k})$. Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{m_1}, \ldots, \varepsilon_{m_n}\} > 0$. Es gilt $B(x, \varepsilon) \cap M = \emptyset$, denn:
Angenommen, es existiert $y \in B(x, \varepsilon) \cap M$.
Wegen $M \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(m_k, \varepsilon_{m_k})$ existiert ein k mit $|y - m_k| < \varepsilon_{m_k}$. Es gilt $|y - x| < \varepsilon \leq \varepsilon_{m_k}$, d.h. $|x - m_k| \leq |x - y| + |y - m_k| < 2\varepsilon_{m_k} = \frac{1}{2}|x - m_k|$, $\lightning$.
Somit ist $\mathbb{R} \setminus M$ offen, also M abgeschlossen.

□

Satz 4.13 (Intervallschachtelung).
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Folgen mit $(a_n)_n$ monoton wachsend, $(b_n)_n$ monoton fallend, $a_n \leq b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann existiert genau ein reelles $r \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Beweis:
Beide Folgen sind monoton und beschränkt, also konvergent.
Wegen $b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n := r$.
Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Wegen $a_{n_0} \leq a_n$ und $b_n \leq b_{n_0}$ $(n \geq n_0)$ folgt
$a_{n_0} \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n = r = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq b_{n_0}$, d.h. $r \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. Somit $r \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.
Sei $r' \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Dann ist $r' \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $r' \geq \lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$. Genauso ist $r' \leq b_n (n \in \mathbb{N})$ und damit $r' \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$. Also ist $r' = r$.

□

Satz 4.14.
Seien $a < b, a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist das Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt.

Beweis:
Angenommen, $[a, b]$ ist nicht kompakt. Dann existiert eine offene Überdeckung $[a, b] \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda, \mathcal{U}_\lambda$ offen, die keine endliche Teilüberdeckung enhält. Setze $[a_1, b_1] := [a, b]$. Mindestens eines der beiden Teilintervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2}, b]$ besitzt ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung.

$$\text{Setze } [a_2, b_2] := \begin{cases} [a, \frac{a+b}{2}] & \text{, falls } [a, \frac{a+b}{2}] \text{ keine endliche Teilüberdeckung besitzt,} \\ [\frac{a+b}{2}, b] & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Betrachte $[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}]$ und $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$ usw. Wir erhalten $[a_i, b_i]$ mit $[a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [a_i, b_i]$, $b_i - a_i \to 0$ $(i \to \infty)$, und $[a_i, b_i]$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung. Sei $\{r\} = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} [a_i, b_i]$ (Satz 4.13). Dann existiert ein λ_0 mit $r \in \mathcal{U}_{\lambda_0}$.
Da $\mathcal{U}_{\lambda_0}$ offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \in \mathcal{U}_{\lambda_0}$. Wegen $a_i \leq r \leq b_i$ und $b_i - a_i \to 0$ ist $[a_i, b_i] \subset (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subset \mathcal{U}_{\lambda_0}$ für $i \geq i_0$.
Damit hat $[a_i, b_i]$ eine endliche Teilüberdeckung (durch $\mathcal{U}_{\lambda_0}$) $\lightning$.

□

Satz 4.15.
Sei V ein normierter Vektorraum, $K \subset V$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt.

Beweis:
Sei $A \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda$ eine offene Überdeckung.
Dann ist $K \subset \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{U}_\lambda \cup (V \setminus A)$ eine offene Überdeckung von K.
Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung.
$K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\lambda_i} \cup (V \setminus A)$. Dann ist $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\lambda_i}$ eine endliche Überdeckung, d.h. A ist kompakt.

□

Korollar 4.16.
Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist äquivalent:

(i) M ist kompakt

(ii) M ist beschränkt und abgeschlossen

Beweis:
(ii) ⇒ (i):
Da M beschränkt ist, existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $M \subset [a, b]$.
Nach Satz 4.13 ist $[a, b]$ kompakt. Da M abgeschlossen ist, folgt die Kompaktheit von M aus Satz 4.14.

(i) ⇒ (ii):
Satz 4.11

□

Bemerkung 4.17.
Sei V ein normierter Vektorraum, $M \subset V$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist abgeschlossen.

(ii) $M = \overline{M}$.

(iii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $x_n \to x_0 \in V$ $(n \to \infty)$ gilt $x_0 \in M$.

Beweis:
(i) ⇒ (ii):
Angenommen, es existiert $x \in \overline{M} \setminus M$. Nach Definition des Häufungspunktes
$\forall \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \cap M \neq 0$ (*)

Also ist x_0 kein innerer Punkt von $V \setminus M$. Also ist $V \setminus M$ nicht offen, Widerspruch zu (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i):
Angenommen, $V \setminus M$ ist nicht offen. Dann existiert ein $x_0 \in V \setminus M$ mit (*). Dann ist x_0 ist Häufungspunkt von M, d.h. $x_0 \in \overline{M} = M$, Widerspruch.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii):
folgt wegen $\overline{M} = \{x_0 \in V | \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : x_n \to x_0 (n \to \infty)\}$.

□

Lemma 4.18.
Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann besitzt jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. es gibt ein $a_0 \in K$ mit $a_{n_k} \to a_0$ $(k \to \infty)$.

Beweis:
Angenommen, $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K$ hat keinen Häufungspunkt. Dann ist $A = \overline{A}$, und $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon_n > 0 : A \cap B(a_n, \varepsilon_n) = \{a_n\}$.
Somit hat $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(a_n, \varepsilon_n)$ keine endliche Teilüberdeckung. Widerspruch, da A nach 4.14 kompakt ist.
Somit existiert ein Häufungspunkt a_0 von A, d.h. es existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \to a_0 (n \to \infty)$.

□

5. Funktionen und Stetigkeit

a. Stetige Funktionen

Definition 5.1 ([streng]**.** monoton wachsend/fallend]
Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f **[streng] monoton wachsend**, falls
$\forall x, y \in D : x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)$ $[f(x) < f(y)]$.

Analog **[streng] monoton fallend**.

Satz 5.2.
Sei $S, T \subset \mathbb{R}$ und $f : S \to T$ streng monoton wachsend. Dann ist f injektiv und $f^{-1} : f(S) \to S$ ist streng monoton wachsend.

Beweis:
Sei $f(x_1) = f(x_2)$. Falls $x_1 < x_2$, so folgt $f(x_1) < f(x_2)$, $\lightning$; ebenso: falls $x_1 > x_2$, so folgt $f(x_1) > f(x_2)$, $\lightning$. Also $x_1 = x_2$.
Somit ist $f^{-1} : f(S) \to S$ definiert. Sei $y_1, y_2 \in f(S)$, $y_1 < y_2$. Dann ist $f^{-1}(y_1) =: x_1 < x_2 := f^{-1}(y_2)$, denn: wäre $x_1 \ge x_2$, so wäre $y_1 = f(x_1) \ge f(x_2) = y_2$, $\lightning$. Also ist f^{-1} ebenfalls streng monoton wachsend.

$\square$

Definition 5.3.

(a) Seien S, T Mengen. Definiere $\mathcal{F}(S; T)$ $(= T^S)$ als die Menge aller Abbildungen von S nach T. Zu $f, g \in \mathcal{F}(S; \mathbb{R})$ definiere
$(f + g)(x) := f(x) + g(x), (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.
Dann ist $\mathcal{F}(S; \mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(b) $\mathcal{B}(S; T) := \{f \in \mathcal{F}(S; T) : \exists c(f) > 0 : \forall x \in S : |f(x)| \le c(f)\}$ (wobei $T \subset \mathbb{R}$). $\mathcal{B}(S; T)$ ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum der beschränkten Funktionen.

Definition 5.4 (Stetigkeit)**.**

(a) Seien $S, T \subset \mathbb{R}$, $f : S \to T$ eine Funktion.
Dann heißt f **stetig in** $x_0 \in S$, falls
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in S\ |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(b) f heißt **stetig**, falls f in jedem $x_0 \in S$ stetig ist.
$C(S;T) := \{f : S \to T | f \text{ ist stetig}\}$ („continuous")
$C(S;T)$ ist wieder ein Vektorraum (siehe später).

Beispiele 5.5.

(a) $f(x) = x$ ist stetig (wähle $\delta = \varepsilon$).

(b) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist stetig:
wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Für $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot \underbrace{|x + x_0|}_{\leq |x|+|x_0|} <$
$2|x - x_0| < 2\delta = \varepsilon$.

(c) $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$
f heißt Heavyside-Funktion. f ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig.
f ist nicht stetig $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in S, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.
Wähle z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{\delta}{2}$. Dann ist $f(x) = 0$, $f(x_0) = f(0) = 1$, d.h. $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$.

(d) $S = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ $f : S \to \mathbb{R}, n \mapsto f(n) =: a_n$ (Folge).
Dann ist f immer stetig, weil für alle $\delta < 1$ und $x_0 \in S$ gilt: $x \in S, |x - x_0| < \delta$ $\Rightarrow x = x_0$.

Definition 5.6.
Sei $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $S \subset \mathbb{R}$ und $f : S \to \mathbb{R}$ oder $f : S \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Definiere:
$b = \lim\limits_{x \to a} f(x) :\Leftrightarrow (\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S \setminus \{a\}, x_n \to a : \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b)$.
In diesem Fall heißt b der Limes von f an der Stelle a.
Beachte: f muss an der Stelle $x = a$ nicht definiert sein!
Analog:
linksseitiger Grenzwert:
$b = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) :\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S \setminus \{a\}, x_n \to a, x_n < a : \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b)$.
rechtsseitiger Grenzwert:
$b = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) :\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S \setminus \{a\}, x_n \to a, x_n > a : \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b)$.

Lemma 5.7.
Sei $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ Funktion, $x_0 \in S$. Dann ist f genau dann stetig an der Stelle x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Beweis:
Falls x_0 kein Häufungspunkt von S ist, ist dies trivial.

(i) Sei x_0 Häufungspunkt von S und f stetig in x_0. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $x \in S, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Da $x_n \to x_0$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ falls $n \geq n_0$. Somit $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.
Also gilt $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

(ii) Es gelte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Angenommen, f ist nicht stetig an der Stelle x_0, d.h.
$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x = x(\delta) \in S : |x(\delta) - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.
Zu $\delta_n := \frac{1}{n}$ wähle $x_n := x(\delta_n)$. Dann $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, d.h. $|x_n - x_0| \to 0$, und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, Widerspruch zu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Also ist f stetig.

□

Satz 5.8.

*(a) Sei $S \subset \mathbb{R}$, $f, g : S \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in S$. Dann sind $f \pm g$, $f \cdot g$ stetig in x_0. Insbesondere ist $C(S;\mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Falls $g(x_0) \neq 0$, setze $S' := \{x \in S : g(x) \neq 0\}$. Dann ist $\frac{f}{g} : S' \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.*

(b) Sei $f : S \to \mathbb{R}$, $g : T \to \mathbb{R}$ mit $f(S) \subset T$. Sei f stetig in $x_0 \in S$ und g stetig in $f(x_0) \in T$. Dann ist $g \circ f : S \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Beweis:

(a) Es gilt $\lim\limits_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0)$,
d.h. $f \pm g$ stetig in x_0.
Genauso für $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

(b) Sei $(x_n)_n \subset S \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$.
Da f stetig ist, gilt $y_n := f(x_n) \to f(x_0) =: y_0$.
Da g stetig ist, folgt $g(y_n) \to g(y_0)$, d.h. $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$.

□

Wir kennen bereits für Mengen $Y \subset \mathbb{R}$ die Begriffe $\sup Y$, $\inf Y$, $\max Y$, $\min Y$.

Beachte: $M = \max Y \Leftrightarrow (M = \sup Y$ und $M \in Y)$. Für Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$ verwendet man die Schreibweisen
$\sup\limits_{x \in S} f(x) := \sup f(S) = \sup\{y \in \mathbb{R} | \exists x \in S : f(x) = y\}$
$M = \max\limits_{x\in S} f(x) \Leftrightarrow (M = \sup\limits_{x\in S} f(x)$ und $\exists x_0 \in S : f(x_0) = y)$

Satz 5.9.
Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt (z.B. $K = [a, b]$), $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt.
Kurz: $C(K; \mathbb{R}) \subset B(K; \mathbb{R})$.

Beweis:
Angenommen, f ist nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ mit $|f(x_n)| > n$. Nach Lemma 4.16 existiert eine konvergente Teilfolge $z_k := x_{n_k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Sei $z_0 := \lim\limits_{k\to\infty} z_k \in K$. Es gilt $|f(z_k)-f(z_0)| \geq |f(z_k)|-|f(z_0)| > n_k-|f(z_0)| \geq k-|f(z_0)| \geq 1$, falls $k > 1 + |f(z_0)|$. Also $f(z_k) \nrightarrow f(z_0)$, Widerspruch zur Stetigkeit von f.

□

Satz 5.10.
Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist der Wertebereich $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt, und $\min\limits_{x\in K} f(x)$, $\max\limits_{x\in K} f(x)$ existieren.
Kurz: f nimmt sein Minimum und Maximum in K an.

Beweis:

(i) Nach Satz 5.9 ist f beschränkt.

(ii) Zu zeigen: $f(K)$ abgeschlossen.
Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ mit $y_n \to y_0 \in \mathbb{R}$. Sei $x_n \in K$ mit $y_n = f(x_n)$.
Wie oben existiert eine Teilfolge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $z_k \to z_0 \in K$ $(k \to \infty)$.
Da f stetig ist, folgt $f(z_k) \to f(z_0)$. Also $f(\underbrace{z_k}_{x_{n_k}}) = y_{n_k} \to y_0$ $(k \to \infty)$. Also $y_0 = f(z_0)$. Also $y_0 \in f(K)$. Also ist $f(K)$ abgeschlossen.

(i) + (ii): $f(K) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

(iii) Da $f(K)$ beschränkt ist, existiert $s := \sup\limits_{x\in K} f(x)$. Falls s ein isolierter Punkt von $f(K)$ ist, dann existiert ein $x \in K$ mit $f(x) = s$. Sonst existiert eine Folge

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ mit $y_n \to s$.
Da $f(K)$ abgeschlossen ist, gilt $s = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in f(K)$. In jedem Fall ist $\sup f(K) \in f(K)$, d.h. $s = \max f(K)$.
Analog $\min f(K)$ existiert.

□

Satz 5.11 (Zwischenwertsatz).
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$.
Sei $z \in (f(a), f(b))$. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = z$.

Beweis:
O.E. sei $z = 0$. (sonst betrachte $f(x) - z$), d.h. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.
Sei $M := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\} = f^{-1}((-\infty, 0))$. Wegen $a \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Wegen $M \subset [a, b]$ ist M beschränkt. Somit existiert $x_0 := \sup M \in [a, b]$.

(a) Angenommen, $f(x_0) < 0$. Da f stetig in x_0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) < 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Denn: wähle $\varepsilon := \frac{|f(x_0)|}{2}$ in der Definition der Stetigkeit. Dann: $\forall |x - x_0| < \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$, d.h. $f(x) < -\frac{|f(x_0)|}{2} < 0$.
Da $x_0 \neq b$ (wegen $f(b) > 0$), existiert ein $x > x_0$ mit $f(x) < 0$, d.h. x_0 ist keine obere Schranke von M, Widerspruch.

(b) Angenommen, $f(x_0) > 0$. Wie oben existiert $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für $x \in [a, b] \cap \{x : |x - x_0| < \delta\}$. Dann existiert $x \in [a, b]$ mit $f(x) > 0$, $x < x_0$. Also ist x_0 nicht die kleinste obere Schranke.

Aus (i) und (ii) folgt $f(x_0) = 0$.

□

Definition 5.12 (gleichmäßig stetig).

(a) Die Stetigkeit einer Funktion ist für manche Anwendungen zu schwach. Betrachte $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. f ist stetig. Aber für $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{2n}$ gilt $|f(x_n) - f(y_n)| = n \to \infty$, obwohl $|x_n - y_n| \to 0$ $(n \to \infty)$.
Dieses f ist nicht gleichmäßig stetig:

Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** in S, falls $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x_0 \in S$ $\forall x \in S$, $|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(b) Seien $(V_1, \|\cdot\|_1)$ und $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume (mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), sei $S \subset V_1$, $f : S \to V_2$ eine Funktion. Dann heißt f stetig in S, falls
$\forall x_0 \in S\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in S, \|x - x_0\|_1 < \delta : \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$.
f heißt gleichmäßig stetig in S, falls
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_0 \in S\ \forall x \in S, \|x - x_0\|_1 < \delta\ \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$.
Bei der gleichmäßigen Stetigkeit darf $\delta = \delta(\varepsilon)$ nicht von x_0 abhängen.
z.B.:
$f : (0,1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$: $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \le 2|x - x_0| < \varepsilon$ falls $|x - x_0| < \delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Da δ unabhängig von x_0 ist, ist f gleichmäßig stetig.

Satz 5.13.
Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis:
Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann
$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in K, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$.
Zu $\delta_n := \frac{1}{n}$ existieren $x_n, y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n - f(y_n)| \ge \varepsilon$.
Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to x_0 \in K$ $(k \to \infty)$.
Da $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, gilt ebenso $y_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$. Da f stetig ist, gilt $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$ und $f(y_{n_k}) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$, Widerspruch zu $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$.

□

Lemma 5.14.
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig.
Dann ist $f^{-1} : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ (streng monoton wachsend und) stetig.

Beweis:
Sei $g : f([a,b]) \to \mathbb{R}, y \mapsto f^{-1}(y)$. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset f([a,b])$ mit $y_n \to y_0 \in f([a,b])$.
Angenommen, $g(y_n) =: x_n \nrightarrow x_0 := g(y_0)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (y_{n_k}) mit $|g(y_{n_k}) - g(y_0)| \ge \varepsilon$. (1)
Da $[a,b]$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge von $(g(y_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$, d.h. O.E. $g(y_{n_k}) \to z \in [a,b]$ $(k \to \infty)$.
Wegen (1) gilt $|z - g(y_0)| \ge \varepsilon$ (2).
Also $y_0 = \lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k \to \infty} f(g(y_{n_k})) = f(z)$ (da f stetig), d.h. $g(y_0) = z$, Widerspruch zu (2).

□

b. Funktionenfolgen

Sei $S \subset \mathbb{R}$. Jetzt geht es um Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : S \to \mathbb{R}$.

Definition 5.15 (punktweise, gleichmäßige Konvergenz)**.**

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert punktweise** gegen $f : S \to \mathbb{R}$, falls für jedes $x \in S$ gilt: $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$.
d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in S\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n : |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen $f : S \to \mathbb{R}$, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n\ \forall x \in S : |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Beispiele 5.16.

(a) $S = [0, 1]$, $f_n := x^n$.

$f_n \to f$ punktweise, wobei $f(x) := \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

Aber für $x = 2^{-\frac{1}{n}} < 1$ gilt $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2}$, d.h. f_n konvergiert nicht gleichmäßig.

(b) $f_n(x) := \frac{x^2}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f_n \to 0$ gleichmäßig, denn:
$|f_n(x)| = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+n} \leq \frac{1}{n}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Dann gilt für alle $m \geq n$ und alle $x \in \mathbb{R}$: $|f_m(x) - 0| = |f_m(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Definition 5.17.
Sei $S \subset \mathbb{R}$. Für $f \in B(S;\mathbb{R})$ (beschränkte Funktionen) sei
$\|f\|_\infty := \sup_{x\in S} |f(x)|$ (Supremumsnorm)

Bemerkung 5.18.

(a) $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $B(S;\mathbb{R})$. (siehe Übungsblatt 7)

(b) Nach Definition gilt: $f_n \to f$ gleichmäßig $\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$.

Satz 5.19.
Seien $f_n(x) : S \to \mathbb{R}$ stetig $(n \in \mathbb{N})$, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen $f : S \to \mathbb{R}$. Dann ist f stetig. Falls alls f_n gleichmäßig stetig sind, dann ist auch f gleichmäßig stetig.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0, x_0 \in S$. Da $f_n \to f$ gleichmäßig, existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_1\ \forall x \in S : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_{n_1} stetig ist, existiert $\delta = \delta(x_0)$ mit $\forall x, |x - x_0| < \delta : |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt für $|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_1}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}(*)} + \underbrace{|f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_1}(x_0) - f_(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}(*)} < \varepsilon$.

Falls alls f_n gleichmäßig stetig sind, kann δ unabhängig von x_0 gewählt werden, und f ist gleichmäßig stetig.

□

Satz 5.20.

(a) $(B(S;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum (= vollständig normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum).

(b) $BC(S;\mathbb{R}) := B(S;\mathbb{R}) \cap C(S;\mathbb{R})$ ist mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum.

(c) $BUC(S;\mathbb{R}) := \{f : S \to \mathbb{R} | \text{beschränkt, gleichmäßig stetig}\}$ ist mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum.

(d) Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist $(C(K;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Beweis:

(a) siehe Übungsblatt ??

(b) Nach (a) konvergiert jede Cauchy-Folge in $BC(S;\mathbb{R}) \subset B(S;\mathbb{R})$ gegen ein $f \in B(S;\mathbb{R})$. Nach Satz 5.19 ist f stetig.

(c) ebenso mit Satz 5.19.

(d) $C(K;\mathbb{R}) = BUC(K;\mathbb{R})$ nach Satz 5.9 und Satz 5.13.

□

Achtung:
Für $S \subset \mathbb{R}$ ist $C(S;\mathbb{R})$ im Allgemeinen kein Banachraum (mit $\|\cdot\|_\infty$).
Es ist sogar $\|f\|_\infty$ im Allgemeinen nicht definiert! (z.B. $S = \mathbb{R}$, $f(x) = x$)

Statt Zahlenreihen können wir jetzt auch Funktionenreihen betrachten: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n, f_n : S \to \mathbb{R}$.
Alle Begriffe übertragen sich, z.B. Konvergenz einer Reihe = Konvergenz der Partialsummen $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, gleichmäßige/punktweise Konvergenz usw.

Lemma 5.21.
Seien $f_n : S \to \mathbb{R}$ stetig, beschränkt und $c_n \geq 0$ mit $\|f_n\|_\infty \leq c_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. $f : S \to \mathbb{R}$.

Beweis:
Für $m < n$ ist $\|s_n - s_m\|_\infty = \|\sum\limits_{k=m+1}^{n} f_k\|_\infty \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} \|f_k\|_\infty \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} c_k \to 0$ für $n, m \to \infty$.
Dabei ist $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BC(S;\mathbb{R})$ eine Cauchy-Folge und damit (nach Satz 5.20) konvergent gegen ein $f \in BC(S;\mathbb{R})$.

□

6. Beispiele von Funktionen

a. Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Exponentialreihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ wurde schon in Abschnitt 3.3 untersucht. Das wird jetzt vertieft.

$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$
$(\mathbb{R}, +) \to ((0; \infty), \cdot)$

Lemma 6.1.

(a) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) \geq 1 + x$, *für alle* $x < 1$ *gilt* $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

(b) *Für alle* $0 < h < 1$, $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $(1 + h)\exp(x) \leq \exp(x + h) \leq \frac{1}{1-h}\exp(x)$.

(c) *Die Exponentialfunktion ist stetig, d.h.* $\exp \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(d) $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv.*

Beweis:

(a) Für $x \geq 0$ ist $\exp(x) - (1 + x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 0$. Für $-1 < x < 0$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ eine alternierende Reihe mit monoton fallenden Gliedern. Daher
$\exp(x) - (1 + x) = \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}}_{>0} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} + \ldots}_{>0} + \ldots > 0.$
Für $x \leq -1$ ist $\exp(x) > 0 \geq 1 + x$.
Für $x < 1$ ist $exp(-x) \geq 1 - x > 0$, d.h. $\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

(b) Nach Satz 3.24 ist $(1 + h)\exp(x) \leq \exp(h)\exp(x) = \exp(x + h) \leq \exp(x)\frac{1}{1-h}$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Sei $h_n := x_n - x$. Dann ist (für $n \geq n_0$) $h_n < 1$ und $\exp(x_n) = \exp(x + h_n) \in [\underbrace{(1 + h_n)}_{\to 1}\exp(x), \underbrace{\frac{1}{1 - h_n}}_{\to 1}\exp(x)]$.
Somit $\exp(x_n) \to \exp(x)$ $(n \to \infty)$, d.h. exp ist stetig.

(d) Für $h > 0$ ist $\exp(x + h) = \exp(x)\exp(h) > \exp(x)$. Nach Satz 5.2 ist exp injektiv.

Es gilt $\exp(x) \geq 1 + x \to \infty$ für $x \to +\infty$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \to 0$ für $x \to +\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz 5.12 ist $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv.

□

Definition 6.2 (natürlicher Logarithmus)**.**

(a) Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist streng monoton wachsend und stetig, besitzt also eine streng monoton wachsende und stetige Umkehrabbildung $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.
ln heißt **natürlicher Logarithmus** oder Logarithmus der Basis e.

(b) Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiere $a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$ mit Umkehrfunktion $\log_a(y) := \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$. Für $a > 0, n \in \mathbb{N}$, definiere $\sqrt[n]{a} := \begin{cases} a^{\frac{1}{n}} & \text{, falls } a > 0 \\ 0 & \text{, falls } a = 0. \end{cases}$
(das ist die Umkehrfunktion zu $a \mapsto a^n$, $[0, \infty) \to [0, \infty)$).

Lemma 6.3.

(a) Für $x, y > 0$ gilt $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

(b) Für $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

(c) Für $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x b^x = (ab)^x$, $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$.

Beweis:
Das folgt alles direkt aus der Definition und der Funktionalgleichung der exp-Funktion.

□

Lemma 6.4.

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\frac{e^x}{x^k} \to \infty$ $(x \to \infty)$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\lim\limits_{x \to \infty} x^k e^{-x} = 0$.

(c) Es gilt $\ln(x) \to +\infty$ $(x \to \infty)$, $\ln(x) \to -\infty$ $(x \searrow 0)$.

(d) Für alle $\alpha > 0$ gilt $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$.

(e) Es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \infty)$.

D.h., die e-Funktion wächst schneller als jede Potenz von x, und die ln*-Funktion wächst langsamer als jede Potenz von x.*

Beweis:

(a) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ und damit $\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x}{(k+1)!} \to \infty, x \to \infty$.

(b) $x^k e^{-x} = \left(\underbrace{\frac{e^x}{x^k}}_{\to\infty} \right)^{-1} \to 0, x \to \infty.$

(c) klar, da $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton, bijektiv.

(d) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Setze $y_n := \underbrace{\alpha}_{>0} \ln(x_n) \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n^\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{\alpha} \cdot \exp(-y_n) = 0$ (nach (b), da $y_n \to \infty$).

(e) $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \to \exp(0) = 1$.

□

Lemma 6.5 (Restgliedabschätzung)**.**
Für $|x| \leq 1 + \frac{n}{2}$ *gilt*
$\left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Beweis:
linke Seite $= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}[1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+3)(n+2)} + \ldots]$

$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}[1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)^2} + \frac{|x|^3}{(n+2)^3} + \ldots] = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{n+2}\right)^j$
$= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{|x|}{n+2}} \leq 2 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, falls $\frac{|x|}{(n+2)} \leq \frac{1}{2}$.

□

Korollar 6.6.
Es gilt $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Beweis:
Lemma 6.5 mit $n = 1 : |e^x - 1 - x| \leq \frac{2|x|^2}{2} = |x|^2$ für $|x| \leq \frac{3}{2}$.
Damit $|\frac{e^x - 1}{x} - 1| \leq |x| \to 0$ für $x \to 0$.

$\square$

b. Die Exponentialfunktion im Komplexen

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Wie in $\mathbb{R}$ definiere $e^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
In allen Abschätzungen in Teil a. (bis auf Lemma 6.1) ist nur der Absolutbetrag eingegangen.
Damit gelten alle Aussagen auch in $\mathbb{C}$:

Satz 6.7.

(a) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe* $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *absolut konvergent.*

(b) *Es gilt die Funktionalgleichung* $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$.

(c) *Für* $|z| \leq 1 + \frac{n}{2}$ *gilt* $\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right| \leq 2\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$.

(d) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig.*

(e) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ $(z \in \mathbb{C})$.

Beweis:
(a) - (c) werden wörtlich wie im reellen Fall bewiesen.

(d) Die Stetigkeit folgt aus (c), da $|\exp(z + h) - \exp(z)| \leq |\exp(z)| \cdot |\exp(h) - 1| \leq |\exp(z)| \cdot 2 \cdot |h| \to 0$, $|h| \to 0$.

(e) $\sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}}$. Wähle nun $N \to \infty$.

□

Bemerkungen 6.8.

(a) Die Stetigkeit in $\mathbb{C}$ ist ein Spezialfall der Stetigkeit in normierten Räumen. Insbesondere gilt $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig, wenn $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $z_n \to z_0$ $(n \to \infty) \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0)$. (Folgenstetigkeit)

Dabei $z_n \to z_0 :\Leftrightarrow |z_n - z_0| \to 0$ $(n \to \infty)$. Beachte $|z| := \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$.
Damit $|z_n - z_0| \to 0$ $(n \to \infty) \Leftrightarrow Re(z_n) \to Re(z_0), Im(z_n) \to Im(z_0)$ $(n \to \infty)$.

(b) $\mathbb{C}$ ist vollständig (d.h. jede Cauchy-Folge ist konvergent). Denn:
$|z_n - z_m| < \varepsilon \Rightarrow (|Re(z_n) - Re(z_m)| < \varepsilon$ und $|Im(z_n) - Im(z_m)| < \varepsilon)$.
Somit sind $x_n := Re(z_n)$ und $y_n := Im(z_n)$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$.
Nach (a) heißt das $z_n \to x_0 + iy_0 =: z_0 \in \mathbb{C}$.

Definition 6.9 (Sinus, Cosinus, Eulersche Formel)**.**
Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $\cos(x) := Re(e^{ix})$ der **Cosinus** von x, und $\sin(x) := Im(e^{ix})$ der **Sinus** von x.

Damit gilt die **Eulersche Formel**:

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}$$

Bemerkung 6.10.
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{\overline{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$.
Also liegt e^{ix} auf dem Einheitskreis.
x ist also ein Maß für den Winkel oder die Länge des Bogens zwischen 1 und e^{ix}.
Später sehen wir, dass der Einheitskreis die Länge 2π besitzt, und dass 2π der Winkel einer vollen Umdrehung ist. Man spricht von x auch vom Winkel im Bogenmaß.

Bemerkung 6.11.
Direkt aus der Definition erhalten wir $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.
Damit $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Satz 6.12 (Additionstheorem)**.**
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$,
$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Beweis:
Es gilt $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$, d.h.
$\cos(x + y) + i\sin(x + y) = (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$.

Ausmultiplizieren und Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert die ersten beiden Gleichungen.

Setze $u := \frac{x+y}{2}$, $v := \frac{x-y}{2}$. Dann ist $u + v = x$, $u - v = y$.
Es ist $\sin(x) - \sin(y) = \sin(u + v) - \sin(u - v) = [\sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)] - [\sin(u)\underbrace{\cos(-v)}_{=\cos(v)} + \cos(u)\underbrace{\sin(-v)}_{=-\sin(v)}] = 2\cos(u)\sin(v) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
Analog $\cos(x) - \cos(y)$.

□

Satz 6.13.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
$\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots.$
Beide Reihen konvergieren absolut.

Beweis:

Es gilt $i^n = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = 4m \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0 \\ i & \text{, falls } n = 4m+1 \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0 \\ -1 & \text{, falls } n = 4m+2 \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0 \\ -i & \text{, falls } n = 4m+3 \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)}_{=\cos(x)} + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)}_{=\sin(x)} \cdot i$$

Die absolute Konvergenz folgt aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe.

□

Definition und Satz 6.14.
Die Funktion cos *hat im Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle. Diese wird mit* $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnet.*

Beweis:

(i) $\cos(0) = 1$ wegen $e^o = 1$.

(ii) $\cos(2) < 0$ wegen $\cos(2) = \underbrace{\left((1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!}\right)}_{=-\frac{1}{3}} - \underbrace{\left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right)}_{>0} - \dots < 0.$

(iii) $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2]$ wegen $\sin(x) = x(1 - \frac{x^2}{3!}) + \frac{x^5}{5!}(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}) + \ldots > 0$ für $x \in (0, 2]$.

(iv) cos ist im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend, denn: für $0 \le x < x' \le 2$ ist $\cos(x') - \cos(x) = -2\sin(\frac{x+x'}{2}) \cdot \sin(\frac{x'-x}{2}) < 0$.

(v) Nach (i) und (ii) ist $\cos(0) > 0$ und $\cos(2) < 0$. Da exp-Funktion stetig ist, ist auch $Re(e^{ix}) = \cos(x)$ stetig, besitzt also nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle. Da cos streng monoton fallend ist, ist die Nullstelle eindeutig.

□

Bemerkung 6.15.
Durch numerische Verfahren kann man $\frac{\pi}{2}$ und damit π berechnen.
Es ist $\pi = 3,14159265\ldots$

Lemma 6.16.

(a) *Es gilt folgende Wertetabelle:*

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1
e^{ix}	1	i	-1	$-i$	1

(b) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:*
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$,
$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$,
$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Beweis:
Es ist $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$. Nach Beweis von Satz 6.14 ist $\sin\frac{\pi}{2} > 0$, d.h. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Also ist $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, und damit $e^{in\frac{\pi}{2}} = i^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Damit erhalten wir die letzte Zeile der Wertetabelle, also auch die zweite und dritte Zeile als Real- und Imaginärteil.
Teil (b) folgt aus (a) und den Additionsthoeremen.

□

Damit gilt:

$$\boxed{1 + e^{i\pi} = 0}$$

Korollar 6.17.
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = k \cdot \pi$, $\cos = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$, $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k \cdot \pi$.

Beweis:
Es gilt $\cos(x) > 0$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ und damit wegen $\cos(x) = \cos(-x)$: $\cos(x) > 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wegen $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ folgt $\sin(x) > 0$ für $x \in (0, \pi)$. Wegen $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ folgt $\sin(x) < 0$ für $x \in (\pi, 2\pi)$. Also hat sin nur die Nullstellen $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die zweite Aussage folgt mit $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. Aus $\sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2i}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}) = \frac{e^{-ix2}}{2i}(e^{ix} - 1)$. Also $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 2k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

□

Definition 6.18 (Tangens, Cotangens)**.**
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$ heißt $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ die **Tangens-Funktion**, für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$ heißt $\cot := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ die **Cotangens-Funktion**.

Definition und Satz 6.19 (Arcus-Cosinus, Arcus-Sinus, Arcus-Tangens)**.**

(a) $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton fallend mit Wertebereich* $[-1, 1]$.
Die Umkehrfunktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *heißt* ***Arcus-Cosinus****.*

(b) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *ist streng monoton steigend und bijektiv. Die Umkehrfunktion* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *heißt* ***Arcus-Sinus****.*

(c) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton steigend und bijektiv. Die Umkehrfunktion* $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *heißt* ***Arcus-Tangens****.*

Beweis:

(a) cos ist streng monoton fallend in $[0, \frac{\pi}{2}]$, also wegen $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$ auch in $[0, \pi]$. Also ist cos bijektiv auf $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$.

(b) folgt aus (a) wegen $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

(c) Für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ist $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ streng monoton steigend. Wegen $\cos(x) \searrow 0, x \nearrow \frac{\pi}{2}$ folgt $\tan(x) \to +\infty, x \nearrow \frac{\pi}{2}$. Damit $(\tan(-x) = -\tan(x))$ folgt $\tan(x) \to -\infty$, $x \searrow \frac{-\pi}{2}$. Also $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bijektiv.

□

Satz 6.20 (Polarkoordinaten).
Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich darstellen als $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z| \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in \mathbb{R}$; für $z \neq 0$ ist φ eindeutig bis auf Vielfache von 2π (d.h. $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig).

Beweis:
Sei $z = 0$, dann $z = 0 \cdot e^{i\varphi}$, φ beliebig.

Sei $z \neq 0$, dann $\widetilde{z} := \frac{z}{|z|} =: x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow 1 = |\widetilde{z}|^2 = x^2 + y^2$
$\Rightarrow |\widetilde{z}| = 1 \Rightarrow \exists \alpha := \arccos(x) \in [0, \pi]$.
Dann $\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \pm\sqrt{1 - x^2} = \pm y$
Setze $\varphi := \begin{cases} \alpha & \text{, falls } \sin(\alpha) = y \\ -\alpha & \text{, falls } \sin(\alpha) = -y \end{cases}$
$\Rightarrow e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = x + iy = \widetilde{z}$
$\Rightarrow z = |z|e^{i\varphi}$

Sei nun $\psi \in \mathbb{R}$ mit $|z|e^{i\varphi} = |z|e^{i\psi}$
$\Rightarrow e^{i(\varphi - \psi)} = 1$
$\Leftrightarrow \varphi - \psi = 2k\pi, k \in Z$ (Korollar 6.17)

□

Bezeichnung:
$r = |z|$: „Betrag z“
$\varphi = arg(z)$: „Argument von z“

Damit lässt sich die Multiplikation in $\mathbb{C}$ einfacher darstellen:

$z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{\varphi_1})(r_2 e^{\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

Korollar 6.21 (n-te Einheitswurzel).
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n komplexe Lösungen („Wurzeln“) nämlich $z = \xi_k$ mit $\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Beweis:
Sei $z^n = 1 \Rightarrow |z^n| = |z|^n = 1 = r^n$ $(z = re^{i\varphi}) \Rightarrow r = 1$
und $z^n = \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi} = 1$

$\Rightarrow n\varphi = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, also $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$.
Wegen $\varphi \in [0, 2\pi) : k = 0, \dots, n-1$.

Dies sind auch alles Lösungen:
$\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{i2k\pi} = 1$

$\square$

Definition 6.22 (Hyperbolische Funktion)**.**
$\cosh(x) := \cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$

$\sinh(x) := \sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{2} \geq 0$ ($\neq 0$ für $x \neq 0$)

$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$, $(x \neq 0)$

7. Differentiation (Ableitung)

a. Differenzierbare Funktion

Definition 7.1.
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$.
Dann heißt f in x differenzierbar, falls

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. Falls nun f in allen $x \in I$ differenzierbar ist, dann heißt f **differenzierbar** (in I).

$f'(x)$ heißt **Ableitung von** f in x.

Beispiele 7.2.

(a) $f(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
$f(x+h) - f(x) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} h^j x^{n-j} \Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} h^{j-1} x^{n-j} \to nx^{n-1}, h \to 0$
also: $f'(x) = nx^{n-1}$

(b) $f(x) := \exp(x)$
$\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \exp(x) \frac{\exp(h)-1}{h} \to \exp(x) \cdot 1 = f(x), h \to 0$ (nach 6.6)
also: $f'(x) = f(x)$

(c) $f(x) := |x|$
$\Rightarrow \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1, x = 0$
$\wedge \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -1, x = 0$
$\Rightarrow \nexists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Bemerkung 7.3.

- links- und rechtsseitige Differenzierbarkeit analog zur „Stetigkeit“.
- $\frac{df}{dx}(x) := f'(x) =: \frac{d}{dx} f(x)$.

Bemerkung 7.4.
Es gilt:

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{f'(x)}_{g(x)} \cdot h + \underbrace{\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right)}_{r(x,h)} \cdot h$$

$$f(x+h) = f(x) + g(x)\cdot h + r(x,h)\cdot h \qquad (1)$$

Dann ist f in x genau dann differenzierbar, wenn (1) gilt mit $\lim\limits_{h\to 0} r(x,h) = 0$. Dann $f'(x) = g(x)$.

Aus (1):

$$f(x+h) = f(x) + f_1(x,h)\cdot h \qquad (2)$$

dann ist f in x genau dann differenzierbar, wenn (2) gilt und $f_1(x,h)$ in $h=0$ stetig ist. Dann $f'(x) = f_1(x,0)$.

Seien E, F normierte Räume, $D \subset E$ offen. Dann heißt $f : D \subset E \to F$ in $x \in D$ differenzierbar, falls $g(x) : E \to F$ linear ***und stetig*** existiert und
$f(x+h) = f(x) + \underbrace{g(x)h}_{=:g(x)(h)} + r(x,h)$ mit $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\|r(x,h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$

Definition 7.5.
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und $f' \in C(I;\mathbb{R})$, d.h. f' ist stetig in I.
Dann gilt $f \in C^1(I;\mathbb{R})$ („stetig differenzierbar“)

Satz 7.6.
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in I$, dann ist f stetig in x.

Beweis:
$\lim\limits_{h\to 0} (f(x+h) - f(x))$
$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim\limits_{h\to 0} h = f'(x)\cdot 0 = 0.$

□

Satz 7.7. *f und g seien differenzierbar in I. Dann gilt:*

(a) $(f+g)' = f' + g'$, $(\alpha f)' = \alpha f'$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ *(Produktregel)*

(c) $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ *für alle* $x \in I$ *mit* $g(x) \neq 0$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$ *für alle $x \in I$ mit $g(x) \neq 0$* *(Quotientenregel)*

Beweis:

(a) folgt direkt aus den Rechenregeln für den Limes.

(b) $\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \underbrace{f(x+h)}_{\to f(x),(\text{ da f stetig})h\to 0} \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x),h\to 0} + g(x)\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x),h\to 0}$
$h \to 0 \Rightarrow \to f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

(c) folgt aus $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left(\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\right)$.

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$.

□

Beispiele 7.8.

(a) $f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$
f ist an der Stelle 0 nicht stetig. Für $h_n := \frac{1}{n}$ ist $f(h_n) = \sin(n\pi) = 0$ und $k_n := \frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$ ist $f(k_n) = \sin((2n+\frac{1}{2})\pi) = 1$.
Also ist f nicht differenzierbar an der Stelle 0.

(b) $g(x) := x \cdot f(x)$ ist stetig an der Stelle 0, aber nicht differenzierbar in 0, denn: $\frac{g(h)-g(0)}{h} = f(h)$ konvergiert nicht für $h \to 0$.

(c) $h(x) := x^2 \cdot f(x)$ ist differenzierbar an der Stelle 0, aber nicht stetig differenzierbar. Es ist $h'(0) = 0$ und für $x \neq 0$ ist $h'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) = \underbrace{2x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\to 0, x\to 0} - \pi\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}_{\text{nicht stetig}}$.

(d) Eine überall stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion:
sei $g(x) := |x|$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ und $g(x+1) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (periodische Fortsetzung);
g heißt Sägezahnfunktion.
g ist an den Stellen $\frac{k}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar.
Sei $g_j(x) = 2^{-j} \cdot g(2^j x)$ für $j \in \mathbb{N}_0$.
Dann ist g_j stetig und an den Stellen $\frac{k}{2^{j+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht differenzierbar.

Für $x = \frac{k}{2^n}$, $y = \frac{k+1}{2^n}$ ist $\frac{g_j(y)-g_j(x)}{y-x} = \begin{cases} \pm 1 & \text{, falls } j \le n-1 \\ 0 & \text{, falls } j > n \end{cases}$
Setze $f(x) := \sum\limits_{j=0}^{\infty} g_j(x)$. Wegen $0 \le g_j \le 2^{-j-1}$ ist die Reihe absolut konvergent.
Nach dem Majorantenkriterium (Lemma 5.21) ist f stetig.
f ist nirgends differenzierbar: sei $a \in \mathbb{R}$. Wähle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{k_n}{2^n}$, $y_n = \frac{k_n+1}{2^n}$, $x_n \le a \le y_n$. Dann ist $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{g_j(y_n)-g_j(x_n)}{y_n-x_n} =$
$\sum\limits_{j=0}^{n-1} \underbrace{\frac{g_j(y_n)-g_j(x_n)}{y_n-x_n}}_{\in\{+1,-1\}} =: z_n$.
Die Zahl $z_n \in \mathbb{Z}$ ist gerade, falls n gerade ist, und ungerade, falls n ungerade. Damit ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent für $n \to \infty$. Wäre f differenzierbar an der Stelle a, so wäre $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \frac{f(y_n)-f(a)+f(a)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \frac{y_n-a}{y_n-x_n} \cdot \underbrace{\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a}}_{\to f'(a)} + \frac{a-x_n}{y_n-x_n} \cdot$

$$\underbrace{\frac{f(a)-f(x_n)}{a-x_n}}_{\to f'(a)} \to f'(a) \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{y_n-a+a-x_n}{y_n-x_n}}_{=1} = f'(a)$$

Somit ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $f'(a) \to \lightning$.

Satz 7.9 (Kettenregel).
Seien f in a differenzierbar und g in $b := f(a)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle a differenzierbar und es gilt $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Beweis:
Nach Bemerkung 7.4 ist
$f(x) = f(a) + f_1(x) \cdot (x-a)$
$g(y) = g(b) + g_1(y)(y-b)$
mit f_1 stetig an der Stelle a, g_1 stetig an der Stelle b und $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = f'(a)$, $\lim\limits_{y\to b} g_1(y) = g'(b)$.
Damit $g \circ f(x) = g(b) + g_1(f(x)) \cdot (f(x) - b)$
$= g(f(a)) + \underbrace{g_1(f(a) + f_1(x)(x-a))}_{\text{stetig an der Stelle } x=a} \cdot (\underbrace{f_1(x)}_{\text{stetig an der Stelle } x=a} (x-a))$
Damit ist $g \circ f$ differenzierbar an der Stelle a, und
$(g \circ f)'(a) = \lim\limits_{x\to a} g_1(f(a) + \underbrace{f_1(x)(x-a)}_{\to 0}) \cdot f_1(x) = g'(f(a))f'(a)$.

□

b. Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ein Punkt $x \in I$ ein **lokales Maximum**, falls $\exists c > 0$ $\forall h, |h| \leq c : f(x+h) \leq f(x)$. Analog **lokales Minimum**.
Ein **Extremum** ist ein Minimum oder Maximum.

Satz 7.10.
$f : I \to \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung U des Punktes x differenzierbar) und besitze an der Stelle x ein lokales Extremum. Dann ist $f'(x) = 0$.*

*) d.h. f ist in $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ definiert und differenzierbar für ein $\varepsilon > 0$

Beweis:
Sei $h > 0$ und o.E. x ein lokales Minimum. Dann ist $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ (falls h klein) damit $f'(x) \geq 0$. Ebenso $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \leq 0$ und damit $f'(x) \leq 0$. Also $f'(x) = 0$.

□

Beachte:
Aus $f'(x) = 0$ folgt nicht, dass f ein Extremum an der Stelle x besitzt. z.B. $f(x) = x^3$ an der Stelle 0.

Satz 7.11 (Satz von Rolle)**.**
Sei $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ differenzierbar in (a,b) und $f(a) = f(b)$.
Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis:
O.E. sei $f(a) = f(b) = 0$. Sei $M := \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \geq 0$.
Falls $M > 0$, existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = M$, und nach Satz 7.10 ist $f'(x_0) = 0$.
Falls $M = 0$, betrachte $m := \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Falls $m < 0$, folgt wie oben die Behauptung.
Falls $m = M = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ und damit $f' = 0$.

□

Satz 7.12 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.**
Sei $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ differenzierbar in (a,b).
Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Beweis:
Sei $F(x) := f(x) - f(a) - (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dann ist $F(a) = F(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle (7.11) existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $F'(x_0) = 0$, d.h. $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

□

Bemerkung 7.13.
Die folgenden Formulierungen sind äquivalent zum Mittelwertsatz:

(i) $\exists x_0 \in (a,b) : f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(x_0)$.

(ii) $\exists \theta \in (0,1) : f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(a + \theta \cdot (b-a))$.

(iii) $\forall h, |h| \leq h_0 \; \exists \theta \in (0,1) : f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x + \theta \cdot h)$.
(wobei $x \in [a,b], h_0 < \min\{|x-a|, |x-b|\}$)

Lemma 7.14.
Sei $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ in $[a,b]$ differenzierbar mit $f'(a) \neq f'(b)$.
Dann nimmt f' in (a,b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

Beachte:
f' muss nicht notwendigerweise stetig sein!

Beweis:
O.E. sei $f'(a) > c > f'(b)$. Setze $g(x) := f(x) - cx$. Dann ist $g'(a) > 0 > g'(b)$. g ist stetig und nimmt sein Maximum und Minimum an. Es gilt $g(a) < \max\limits_{x \in [a,b]} g(x)$, denn sonst ist $g(a+h) \leq g(a)$ für $h > 0$, d.h. $g'(a) \leq 0$.
Analog $g(b) < \max\limits_{x \in [a,b]} g(x)$. Somit existiert ein lokales (hier sogar globales) Maximum von g an einer Stelle $x_1 \in (a,b)$. Nach Satz 7.10 ist $g'(x_1) = 0$, d.h. $f'(x_1) = c$.

□

Korollar 7.15.

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I.
Dann gilt $f' = 0 \Leftrightarrow f = const.$

(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in I.
Dann gilt: f wächst monoton $\Leftrightarrow \forall x \in I : f'(x) \geq 0$.

Beweis:

(a) „$\Leftarrow$“ : ist klar.
„$\Rightarrow$“ : Seien $x, x_0 \in I$, $x < x_0$, d.h. $[x, x_0] \subset I$. Nach dem Mittelwertsatz gilt $\exists z \in (x, x_0) : f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(z)}_{=0}(x - x_0) = f(x_0)$.

(b) „$\Rightarrow$“ : Für $h > 0$ gilt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Also $f'(x) \geq 0$.
„$\Leftarrow$“ : Für $h > 0$ gilt $f(x + h) = f(x) + \underbrace{h}_{>0} \cdot \underbrace{f'(x + \theta \cdot h)}_{>0} \geq f(x)$ mit einem $\theta \in (0, 1)$.

□

Definition 7.16 (mehrfach differenzierbar).
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **zweimal differenzierbar** an der Stelle $x \in I$, falls die Ableitung f' existiert und an der Stelle x differenzierbar ist.
Man schreibt $f''(x) := (f')'(x)$.
Genauso: k-mal differenzierbar mit $k \in \mathbb{N}$.
Schreibweise: $f^{(k)}(x)$.
Definiere $C^k(I; \mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ ist in } I\ k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$.

Satz 7.17 (Taylorreihe bis zum linearen Term).
Sei $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ in (a, b) zweimal differenzierbar. Zu $x \in [a, b]$ und $h > 0$ mit $[x, x + h] \subset [a, b]$ existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(h) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x + \theta \cdot h).$$

Beweis:
Definiere mit einer Konstanten $m \in \mathbb{R}$:
$F(z) := f(x + h) - f(x + z) - (h - z)f'(x + z) - m \cdot \frac{(h-z)^2}{2}$.
Dann ist $F(0) = f(x + h) - f(x) - h \cdot f'(x) - m \cdot \frac{h^2}{2}$ und $F(h) = 0$.
Wähle m so, dass $F(0) = 0$.
Nach dem Satz von Rolle (7.11) existiert ein $z_0 \in (0, h)$ mit $F'(z_0) = 0$.
Damit $0 = F'(z_0) = -f'(x + z_0) + f'(x + z_0) - (h - z_0) \cdot f''(x + z_0) + m \cdot (h - z_0)$
$= (h - z_0) \cdot [-f''(x + z_0) + m]$.
Also ist $m = f''(x + z_0)$ und wegen $F(0) = 0$ folgt
$f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x + z_0)$. Schreibe $z_0 = \theta \cdot h$, $\theta \in (0, 1)$.

□

Korollar 7.18.
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$. Dann hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Minimum. (Analog für Maximum)

BEWEIS:
$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h^2}{2} \cdot \underbrace{f''(x_0+\theta h)}_{>0 \text{ für } h \text{ klein, da } f''(x_0)>0, f'' \text{ stetig}} > f(x_0)$ für $h \neq 0, h$ klein.

□

BEMERKUNG:
Diese Bedingung ist aber nicht notwendig für ein Extremum, z.B. $f(x) = x^4$, $x = 0$.

SATZ 7.19 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.**
*Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in einer Umgebung von $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$.
Dann existiert eine Umgebung $V(y_0)$ von $y_0 := f(x_0)$, in der die Umkehrabbildung $g : V(y_0) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \left(f|_{\mathcal{U}(x_0)}\right)^{-1}(y)$ existiert, wobei $\mathcal{U}(x_0)$ eine Umgebung von x_0 ist.
Es ist $g \in C^1(V(y_0); \mathbb{R})$ und $g' = \frac{1}{f' \circ g}$ in $V(y_0)$.*

BEWEIS:
O.E. sei $f'(x_0) > 0$. Da f' stetig ist, existiert eine Umgebung $\mathcal{U}(x_0)$ und ein $c > 0$ mit $f'(x) \geq c > 0$ für $x \in \mathcal{U}(x_0)$.
Für $x, x+h \in \mathcal{U}(x_0)$, $h > 0$, gilt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta \cdot h) \geq c > 0$ mit einem $\theta \in (0,1)$.
Somit ist $f|_{\mathcal{U}(x_0)}$ streng monoton wachsend, also bijektiv, d.h. $g := \left(f|_{\mathcal{U}(x_0)}\right)^{-1}$ existiert. Nach Lemma 5.14 ist g stetig. Es gilt
$1 = \frac{(y_0+h)-y_0}{h} =$
$\frac{(f\circ g)(y_0+h)-(f\circ g)(y_0)}{h} =$
$\frac{(f\circ g)(y_0+h)-(f\circ g)(y_0)}{g(y_0+h)-g(y_0)} \cdot \frac{g(y_0+h)-g(y_0)}{h}$.
Für $h \to 0$: $\frac{(f\circ g)(y_0+h)-(f\circ g)(y_0)}{g(y_0+h)-g(y_0)} \to f'(g(y_0))$, da g stetig und damit $g(y_0+h) \to g(y_0)$ d.h. $\widetilde{h} := g(y_0+h) - g(y_0) \to 0$.
Damit ist g differenzierbar an der Stelle x_0 und $g'(y_0) = [f'(g(y_0))]^{-1}$. Da f' stetig ist, ist auch g' stetig.

□

SATZ 7.20. *(Erweiterter Mittelwertsatz, Regel von L'Hospital)*

(a) ***Erweiterter Mittelwertsatz:***
Seien $f, g \in C([a,b]; \mathbb{R})$ in (a,b) differenzierbar und $g(a) \neq g(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit
$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x_0)$.

(b) ***Regel von L'Hospital:***
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, sei $a \in I$ und $f(a) = g(a) = 0$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der rechte Limes existiert. Dabei ist I ein Intervall mit

$a \in I$.

Beweis:

(a) Wende den Satz von Rolle (7.11) an auf
$F(x) := f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
Es gilt $F(a) = F(b) = 0$.

(b) Nach (a) ist für $b > a : \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ mit einem $x_0 \in (a, b)$.
Nehme nun den Limes $b \to a$ (damit $x_0 \to a$) und erhalte die Behauptung.

□

Mit L'Hospital folgt z.B.: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$. Dabei wurde das folgende Beispiel verwendet.

Beispiele 7.21 (Ableitung elementarer Funktionen)**.**

(a) Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $f(x) := x^n$. Dann ist $f'(x) = nx^{n-1}$.
Kurz: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.
Für $n > 0$ siehe 7.2 (a). Weiter $(x^{-n})' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot n \cdot x^{n-1} = (-n)x^{-n-1}$ für $n > 0$.

(b) Es gilt $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$
Denn: $\frac{d}{dx}e^{ix} = ie^{ix} = i(\cos(x) + i\sin(x)) = -\sin(x) + i\cos(x)$.
Und: $\frac{d}{dx}e^{ix} = \frac{d}{dx}(\cos(x) + i\sin(x)) = \cos'(x) + i\sin'(x)$.
Vergleiche Real- und Imaginärteil.

(c) Es gilt $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, denn $\tan'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

(d) Es gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, denn: $\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$. (7.19)

(e) Für $|x| < 1$ ist $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Denn: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (7.19)
Analog $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(f) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$, $(x > 0)$.
Denn $x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x))$, d.h. $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \exp(\alpha\ln(x)) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Satz 7.22.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $x_n \to x \neq 0$, für $n \to \infty$.
Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x_n}{n})^n = e^x$.
Speziell: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Beweis:
$n\ln(1+\frac{x_n}{n}) = \frac{\ln(1+\frac{x_n}{n})}{\frac{x_n}{n}} \cdot x_n \to \ln'(1)\cdot x = x$
Beachte: $h_n := \frac{x_n}{n} \to 0$ und $\frac{\ln(1+h_n)-\ln(1)}{h_n} \to \ln'(1)$
Beachte: $\frac{x_n}{n} \neq 0$ und $1+\frac{x_n}{n} > 0$ für großes n.
Damit $(1+\frac{x_n}{n}^n) = \exp(n\ln(1+\frac{x_n}{n})) \to \exp(x)$, für $n \to \infty$. (exp stetig)
□

Definition 7.23 (konvexe, konkave Funktion)**.**
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**, falls $\forall x_1, x_2 \in I$ $\forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.
f heißt **konkav**, falls $-f$ konvex ist.

Satz 7.24.
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, falls $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.
(Analog ist f genau dann konkav, falls $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I$)

Beweis:

(i) Sei $f'' \geq 0$. Dann ist f' monoton wachsend (7.15 (b)). Seien $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $0 < \lambda < 1$, $x := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in (x_1, x_2)$.
Nach dem Mittelwertsatz ist
$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ mit $\xi_1 \in (x_1, x), \xi_2 \in (x, x_2)$.

Wegen $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2-x_1)$ und $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$ folgt $\frac{f(x)-f(x_1)}{1-\lambda} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{\lambda}$, d.h. $f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

(ii) Sei f konvex. Angenommen, es existiert ein $x_0 \in I$ mit $f''(x_0) < 0$.
Sei $\varphi(x) := f(x) - f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ für $x \in I$. Dann ist $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0$.
Nach Korollar 7.18 besitzt φ an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Maximum, d.h. für $h > 0$ klein ist $\varphi(x_0 \pm h) < \varphi(x_0)$.
Damit $f(x_0) = \varphi(x_0) > \frac{1}{2}(\varphi(x_0+h) + \varphi(x_0-h)) = \frac{1}{2}(f(x_0+h) + f(x_0-h))$, Widerspruch zur Konvexität von f.

$\square$

Bemerkung 7.25.
Eine konvexe Funktion erfüllt
$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \leq t_1 f(x_1) + \ldots + t_n f(x_n)$
für alle $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$.

Insbesondere gilt die Jensensche Ungleichung:
$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n))$.

8. Integration von Regelfunktionen

a. Die Stammfunktion

Die Integration wird zunächst als Umkehrung der Differentiation betrachtet.

Definition 8.1 (Stammfunktion bzw. unbestimmtes Integral)**.**
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $F : I \to \mathbb{R}$ eine **Stammfunktion** von f, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. Man schreibt
$\int f := \int f(x)\,dx := F$
$\int f$ heißt das **unbestimmte Integral** von f.

Beispiele 8.2.

f	1	x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\int f$	x	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\tan(x)$	$\arctan(x)$

Lemma 8.3 (Integrationsregeln)**.**

(a) $\int cf = c\int f$ *für* $c \in \mathbb{R}$, $\int(f+g) = \int f + \int g$

(b) *(Partielle Integration)*
$\int(f' \cdot g) = f \cdot g - \int(f \cdot g')$

(c) $\int f \cdot f' = \frac{1}{2}f^2$, $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$

(d) $\int(f \circ g) \cdot g' = F \circ g$ *mit* $F = \int f$

Beweis:
Das folgt alles aus den Regeln für die Ableitung.

(b) $(f \cdot g)' = f'g + fg' \Rightarrow fg = \int f'g + \int fg'$

(d) $(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$

□

Beispiele 8.4.

(a) $\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - x$

(b) $\int \sin^2(x)\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{=f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=g'}\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x) - \int -\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx =$
$-\cos(x)\sin(x) + \int(1 - sin^2(x))\,dx = -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx\ (\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1)$
Also: $\int \sin^2(x) = \frac{1}{2}(-\cos(x)\sin(x) + x)$

(c) $\int xe^x\,dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = (x-1)e^x$

(d) $\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}$ $\qquad (y = x^2,\ dy = 2x\,dx)$

(e) $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx =$ $\qquad (u = \sin(x),\ du = \cos(x)\,dx)$
$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{\sin(x)}$

Beispiel 8.5 (Partialbruchzerlegung).
Gesucht: $\int \frac{x^3-2}{x(x-1)^2}\,dx$

(i) Division mit Rest: $\frac{x^3-2}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{x^3-2-x(x-1)^2}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{2x^2-x-2}{x(x-1)^2} =: 1 + \frac{f(x)}{g(x)}$

(ii) Ansatz der Partialbruchzerlegung: sei x_0 eine einfache Nullstelle von g, d.h.
$g(x) = (x - x_0)\cdot g_1(x)$
Schreibe $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{x-x_0} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \mid \cdot (x - x_0)$
$$\frac{f(x)\cdot(x-x_0)}{g(x)} = c + \underbrace{(x - x_0)\cdot\frac{f_1(x)}{g_1(x)}}_{=0 \text{ für } x=x_0}$$
Somit $c = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot(x-x_0)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g_1(x)} = \frac{f(x_0)}{g_1(x_0)}$

Hier: $g(x) = x(x-1)^2$, $x_0 := 0$. $f(x_0) = 2x_0^2 - x_0 - 2 = -2$
$g_1(x_0) = (x_0 - 1)^2 = 1$. Damit $c = -2$.
$\frac{2x^2-x-2}{x(x-1)^2} = -\frac{2}{x} + \frac{2(x-1)^2+2x^2-x-2}{x(x-1)^2} = -\frac{2}{x} + \frac{4x^2-5x}{x(x-1)^2} = -\frac{2}{x} + \frac{4x-5}{(x-1)^2}$

(iii) Doppelte Nullstellen: Ansatz $\frac{4x-5}{(x-1)^2} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} \mid \cdot (x-1)^2$
$4x - 5 = c_1(x-1) + c_2 = c_1x + (c_2 - c_1)$
Koeffizientenvergleich: $c_1 = 4$, $c_2 - c_1 = -5$
d.h. $c_1 = 4$, $c_2 = -1$.

(iv) Insgesamt: $\frac{x^3-2}{x(x-1)^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$
Also: $\int \frac{x^3-2}{x(x-1)^2}\,dx = x - 2\ln|x| + 4\ln|x-1| + \frac{1}{x-1}$

Allgemeiner Ansatz der Partialbruchzerlegung: Seien f, g Polynome mit $\deg(f) < \deg(g)$. Sei x_0 eine k-fache Nullstelle von g. Schreibe $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c_1}{(x-x_0)} + \frac{c_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \frac{c_k}{(x-x_0)^k} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ mit $g_1(x_0) \neq 0$. Beachte, dass die Nullstellen komplex sein können.

b. Treppenfunktionen und Regelfunktionen

Jetzt wird Integration als Messung einer Fläche verstanden.

Definition 8.6.
Sei $I = (a, b)$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es eine Zerlegung (Partition) von I der Form $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gibt, so dass $f|_{(x_{i-1},x_i)}$ konstant ist.

Bemerkung 8.7.

(a) Die Partition ist nicht eindeutig.

(b) Über die Werte von f an den „Sprungstellen" x_i wird nichts ausgesagt.

(c) f ist genau dann Treppenfunktion, wenn es $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \cdot \chi_{(x_{i-1},x_i)}(x)$ für $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$.
Dabei heißt für eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ die Funktion $\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A, \\ 0 & , x \notin A, \end{cases}$ die charakteristische Funktion von A.

(d) Falls f, g Treppenfunktionen sind, so auch $f + g$, αf mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$.

(e) Durch die Norm $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$ wird die Menge aller Treppenfunktionen zu einem normierten Vektorraum. Wir schreiben $T(I; \mathbb{R})$.
Es gilt $T(I; \mathbb{R}) \subset B(I; \mathbb{R})$ (Raum der beschränkten Funktionen (Banachraum); siehe 5.3 und 5.19).

Definition 8.8 (Regelfunktionen)**.**
Der Abschluss $R(I; \mathbb{R}) := \overline{T(I; \mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\infty} \subset B(I; \mathbb{R})$ des Raums aller Treppenfunktionen bezüglich $\|\cdot\|_\infty$-Norm in $B(I; \mathbb{R})$ heißt der Raum der **Regelfunktionen** von I nach $\mathbb{R}$.

Definition 8.9 (Integral von Treppenfunktionen)**.**
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $f|_{(x_{i-1},x_i)} = f_i \in \mathbb{R}$. Dann heißt
$\int\limits_I f = \int\limits_a^b f := \int\limits_a^b f(x)\,dx := \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ das **(bestimmte) Integral von** f **über** (a, b).
Setze $\int\limits_a^a f(x)\,dx := 0$

Definition und Satz 8.10.

(a) *Sei $I = (a,b)$. Die Abbildung $T : T(I;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ ist linear, d.h $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ für alle $f, g \in T(I;\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und beschränkt, denn es gilt $|T(f)| \le (b-a) \cdot \|f\|_\infty$.*
Damit ist $T : T(I;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ stetig.

(b) *Es existiert genau eine lineare stetige Fortsetzung $\widetilde{T} : R(I;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.*
Für $f \in R(I;\mathbb{R})$ ist $\widetilde{T}f$ folgendermaßen definiert: sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I;\mathbb{R})$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f - f_n\|_\infty \to 0\ (n \to \infty)$. Dann gilt $\widetilde{T}(f) = \lim_{n\to\infty} T(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.

Für $f \in R(I;\mathbb{R})$ schreiben wir wieder $\widetilde{T}(f) =: \int_a^b f(x)\,dx$.

Es gilt $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (b-a)\|f\|_\infty$ für alle $f \in R(I;\mathbb{R})$.

Beweis:

(a) Die Linearität von T ist klar.
Für $f \in R(I;\mathbb{R})$ gilt $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^n f_i(x_i - x_{i-1})\right| \le \sum_{i=1}^n |f_i|(x_i - x_{i-1}) \le \sup_{x\in(a,b)} |f(x)| \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \|f\|_\infty \cdot (b-a)$.
Also ist T beschränkt und damit stetig (Übungsaufgabe).

(b) Sei $f \in R(I;\mathbb{R})$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I;\mathbb{R})$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0\ (n \to \infty)$.
Dann gilt $|Tf_n - Tf_m| = |T(f_n - f_m)| \le \|f_n - f_m\|_\infty \cdot (b-a) \to 0\ (n, m \to \infty)$.
Also ist $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $\widetilde{T}f := \lim_{n\to\infty} Tf_n \in R$.

Wohldefiniertheit von $\widetilde{T}f$:
zu zeigen ist noch, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} Tf_n$ nicht von der Wahl der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt.
Sei also $f_n \to f\ (n \to \infty)$ und $g_n \to f\ (n \to \infty)$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I;\mathbb{R})$.
Dann gilt $\|f_n - g_n\|_\infty \le \|f_n - f\|_\infty + \|f - g_n\|_\infty \to 0\ (n \to \infty)$.

Damit $|Tf_n - Tg_n| = |T(f_n - g_n)| \leq (b-a) \cdot \|f_n - g_n\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$-
Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} Tf_n = \lim\limits_{n\to\infty} Tg_n$ $(= \widetilde{T}f)$.

Es gilt $|\widetilde{T}(f)| = \lim\limits_{n\to\infty} |Tf_n| \leq (b-a) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = (b-a) \cdot \|f\|_\infty$ (da Norm stetig).
Damit ist $\widetilde{T}$ linear und beschränkt, also stetig.
Die Wahl $\widetilde{T}f := \lim\limits_{n\to\infty} Tf_n$ ist die einzige mögliche, weil $\widetilde{T}$ stetig sein soll.
Also existiert nur eine stetige lineare Fortsetzung von T.

□

Bemerkung:
In obigem Beweis wurde die übliche Schreibweise bei linearen Abbildungen $Tf := T(f)$ verwendet.

Beispiel 8.11.
Sei $I = (0,1)$; $f(x) = x$.
Für $n \in \mathbb{N}$ wähle Treppenfunktionen $f_n|_{(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} := \frac{i-1}{n}$ $(i = 1, \ldots, n)$.
Dann gilt $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$.
Damit ist $f \in R(I; \mathbb{R})$.

Es ist $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n}$. Also ist $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Beachte: $\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. Das kommt später ...

Die Frage ist nun, welche Funktionen Regelfunktionen sind.

Satz 8.12.
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton. Dann ist f Regelfunktion (d.h. integrierbar nach 8.10).

Beweis:
O.E. sei f monoton wachsend.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle Partition der Funktionswerte

$$f(a) = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = f(b)$$

mit $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$.

Betrachte die Urbilder $X_i := \begin{cases} f^{-1}([y_{i-1}, y_i)) & \text{für } i = 1, \ldots, n-1 \\ f^{-1}([y_{n-1}, y_n]) & \text{für } i = n. \end{cases}$

Dann ist $[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ eine Partition (=disjunkte Vereinigung von Intervallen).
Definiere die Treppenfunktion t durch $t(x) := y_{i-1}$ für $x \in X_i$.
Dann ist $\|f - t\|_\infty \leq \varepsilon$. Da ε beliebig war, liegt f im Abschluss der Treppenfunktion bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, ist also Regelfunktion.

□

Satz 8.13.
Sei $f \in R(I;\mathbb{R})$ und $x_0 \in I$. Dann besitzt f an der Stelle x_0 einen links- und rechtsseitigen Grenzwert $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$. Analog am Rand von I.

Beweis:
Sei $x_0 \in [a,b)$ und $x, y > x_0$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I;\mathbb{R})$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann gilt $|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \text{ für } n \geq n_0} + |f_n(x) - f_n(y)| + \underbrace{|f_n(y) - f(y)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \text{ für } n \geq n_0}$

Sei $n \geq n_0$ fest. Dann gilt $\lim\limits_{x,y \searrow x_0} |f_n(x) - f_n(y)| = 0$, da f_n eine Treppenfunktion ist (beachte, dass f_n an der Stelle x_0 springen kann).
Somit ist für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ mit $x_n \searrow x_0$ $(n \to \infty)$ die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge. Also existiert der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$.

□

Satz 8.14.
Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitze an jeder Stelle $x_0 \in [a,b]$ einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert. (am Rand nur einseitig). Dann ist $f \in R(I;\mathbb{R})$. Somit gilt $R(I;\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} | f$ besitzt überall in $[a,b]$ einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert$\}$.
Insbesondere ist $C([a,b];\mathbb{R}) \subset R(I;\mathbb{R})$.

Bemerkung (Beweisidee):
Ich starte mit f, welches an jeder Stelle $c \in [a,b]$ einseitige Grenzwerte besitzt.
Die Idee lautet, lokal zu jedem c die Treppenfunktion t so zu definieren, dass $\|f - t\|_\infty = \sup\limits_x |f(x) - t(x)| < \varepsilon$.
Dazu $t(c) := f(c)$.
Links und rechts von c ändert sich f nur wenig (weil die einseitigen Grenzwerte existieren). Genauer gibt es Intervalle $(c - \delta, c)$ und $(c, c + \delta)$, in denen sich f nur

um ε ändert. Definiert man $t|_{(c-\delta,c)} := f(z)$ mit $z \in (c-\delta, c)$, so gilt $|t(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für $x \in (c-\delta, c)$.
Dass ich insgesamt mit endlich vielen Intervallen (also endlich vielen Punkten $c \in [a,b]$) auskomme, liefert die Kompaktheit.

Beweis:
Nach Voraussetzung gilt:
$\forall \varepsilon > 0\ \forall c \in [a,b]\ \exists \delta(c) > 0\ \forall x, y,, |x-c| < \delta(c), |y-c| < \delta(c)$ und $((x, y > c)$ oder $(x, y < c))$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (*)

Da $[a,b]$ kompakt ist, besitzt die offene Überdeckung $[a,b] \subset \bigcup\limits_{c\in[a,b]} (c-\delta(c), c+\delta(c))$ eine endliche Teilüberdeckung $[a,b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} (c_i - \delta_i, c_i + \delta_i)$.
Die Punkte $\{a, b, c_1, c_1-\delta_1, c_1+\delta_1, c_2, c_2-\delta_2, c_2+\delta_2, \ldots, c_k, c_k-\delta_k, c_k+\delta_k\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bilden der Größe nach sortiert eine Partition des Intervalls $[a,b]$ (streiche dabei alle Punkte links von a oder rechts von b).

Definiere $t \in T(I;\mathbb{R})$ durch $t(x) := \begin{cases} f(x_j) & \text{, für } x = x_j \\ f(z_j) & \text{, für } x \in (x_j, x_{j+1}), \end{cases}$

wobei $z_j \in (x_j, x_{j+1})$ beliebig gewählt wird. Nach Konstruktion folgt aus (*) $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - t(x)| \leq \varepsilon$.
Da ε beliebig war, folgt, $f \in \overline{T(I;\mathbb{R})} = R(I;\mathbb{R})$.

$\square$

c. Wichtige Sätze zur Integration

Satz 8.15 (Rechenregeln für Integrale)**.**
Für $f, g \in R(I;\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a < b$ gilt

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \qquad f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$$

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f, \quad (b-a) \inf_{x \in (a,b)} f(x) \leq \int_a^b f \leq (b-a) \sup_{x \in (a,b)} f(x), \quad |\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Beweis:
Alle Eigenschaften gelten für Treppenfunktionen und bleiben beim Grenzwert erhalten.

□

Satz 8.16 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.**
Sei $f \in C([a,b];\mathbb{R})$. Dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(c)$.

Beweis:
Für $m := \min_{x \in [a,b]} f(x)$ und $M := \max_{x \in [a,b]} f(x)$ gilt $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$ nach 8.15.

Nach dem Zwischenwertsatz (5.11) existiert $c \in (a,b)$ mit $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$.

□

Satz 8.17.
Sei $f \in R(I;\mathbb{R})$ und $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \; (x \in [a,b])$.

(a) Für $x, y \in [a,b]$ gilt $|F(x) - F(y)| \leq |x-y| \cdot \|f\|_\infty$, d.h. F ist ***Lipschitz-stetig*** *und damit stetig.*

(b) Für $x \in [a,b]$ existiert die rechts- und linksseitige Ableitung $F'_\pm(x) := \lim_{h \searrow 0} \frac{F(x \pm h) - F(x)}{h} = f(x \pm 0) := \lim_{h \searrow 0} f(x \pm h)$.

Bemerkung:
Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls eine Konstante $c > 0$ existiert mit $\forall x, y \in I : |F(x) - F(y)| \leq c \cdot |x-y|$.

Das kleinste c, für das diese Ungleichung gilt, heißt **Lipschitz-Konstante** von F.

Sei $\alpha > 0$. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Hölder-stetig** mit **Hölder-Exponent** α, falls ein $c > 0$ existiert mit $forall x, y \in I : |F(x) - F(y)| \leq c \cdot |x - y|^{\alpha}$.
(d.h. Lipschitz entspricht Hölder mit $\alpha = 1$)
Betrachtet man $\lim\limits_{y \to x} |F(x) - F(y)|$, dann sieht man, dass jede Hölder-stetige Funktion stetig ist.

Beweis: (von Satz 8.17)

(a) O.E. $y > x$. Dann ist $|F(x) - F(y)| = \left| \int\limits_x^y f(t)\,dt \right| \leq \int\limits_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\leq \|f\|_\infty} dt \leq \|f\|_\infty \cdot \int\limits_x^y 1\,dt = \|f\|_\infty \cdot (y - x)$.

(b) Sei $h > 0$.
Dann ist $F(x+h) - F(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt$ und $h \cdot f(x+0) = \int\limits_x^{x+h} \underbrace{f(x+0)}_{\text{unabhängig von } t} dt$

Somit $F(x+h) - F(x) - h \cdot f(x+0) = \int\limits_x^{x+h} (f(t) - f(x+0))\,dt$.
Da $f(x+0)$ der rechtsseitige Grenzwert ist, gilt
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in (x, x+\delta) : |f(t) - f(x+0)| < \varepsilon$.
Für $h > \delta$ gilt also $|F(x+h) - F(x) - h \cdot f(x+0)| \leq \varepsilon \cdot h$,
damit $(h \searrow)\ F'_+(x) = f(x+0)$.
Analog für $h \nearrow 0$

□

Satz 8.18 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).
Sei $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ und $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Dann ist $F \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ und $F' = f$.
Kurz:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),\ f \in C([a,b])}$$

Beweis:
Folgt sofort aus Satz 8.17, da für eine stetige Funktion f gilt:

$\forall x \in [a,b] : f(x+0) = f(x-0) = f(x)$.

$\square$

Bemerkung 8.19.
Zwei Stammfunktionen F_1, F_2 unterscheiden sich nur um eine Konstante (da $F_1' - F_2' = f - f = 0$). Zu $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ ist $F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,dt$ die Stammfunktion mit $F(a) = 0$. Für eine beliebige Stammfunktion G ist also $G(x) = F(x) + G(a)$, d.h. $\underbrace{\int\limits_a^b}_{=F(b)} f(t)\,dt = G(b) - G(a)$.

Beispiel 8.20.

(a) Wir wissen bereits, dass man bei Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sehr auf die Konvergenz achten muss (punktweise, gleichmäßig). Dies gilt auch beim Integral: (Skizze siehe Aufschrieb).

Für die skizzierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\int\limits_0^1 f_n(t)\,dt = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, aber $f_n(t) \to 0$ für alle $t \in [0,1]$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n = 1 \neq 0 = \int \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

(b) Auch beim Differenzieren muss man aufpassen: sei $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann gilt $f_n \to 0$ gleichmäßig, aber $f_n'(x) = \cos(nx) \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$.

Satz 8.21.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(I;\mathbb{R})$, $f \in R(I;\mathbb{R})$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig.
Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(t)\,dt = \int\limits_a^b f(t)\,dt$.

Beweis:
Klar wegen $|\int\limits_a^b f_n - \int\limits_a^b f| = |\int\limits_a^b (f_n - f)| \leq \int\limits_a^b |f_n - f| \leq (b-a)\cdot \|f_n - f\|_\infty$.

$\square$

Satz 8.22.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1([a,b];\mathbb{R})$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ punktweise. Sei $(f_n')_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b];\mathbb{R})$ gleichmäßig konvergent. Dann ist f differenzierbar, es gilt $f_n \to f$ gleichmäßig und $f_n' \to f'$ gleichmäßig.
D.h. $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.

Beweis:
Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (8.18) ist

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt \tag{*}$$

Daher $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \underbrace{|f_n(a) - f_m(a)|}_{\to 0,\text{ da } (f_n)_n \text{ punktweise konvergiert}} + (b-a)\cdot \underbrace{\|f_n' - f_m'\|_\infty}_{\to 0} \to 0$
$(n, m \to \infty)$.
Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge und damit gleichmäßig konvergent gegen f.
Sei $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$. Nach Satz 8.21 ist $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$ (nach (*); $n \to \infty$ in (*))
Also ist f differenzierbar, und $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

□

Satz 8.23 (Parameterabhängige Integrale, Teil 1: Stetigkeit)**.**
Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ gleichmäßig bezüglich x stetig in t, d.h. $\forall t_0 \in [c,d]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t, |t - t_0| < \delta\ \forall x \in [a,b] : |f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon$.
Dann ist $F(t) := \int_a^b f(x,t)\,dx$ stetig in $[c,d]$.

Beweis:
Folgt sofort aus $|F(t) - F(t_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\,dx \leq (b-a)\cdot\varepsilon$ falls $|t - t_0| < \delta$.

□

Satz 8.24 (Parameterabhängige Integrale, Teil 2: Differentiation)**.**
Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Es existiere die partielle Ableitung $\frac{\delta f}{\delta t}(x,t) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}$ für jedes feste $x \in [a,b]$.
Es gelte

(i) $(x \mapsto \frac{\delta f}{\delta t}(x,t)) \in R((a,b);\mathbb{R})$ *für alle festen t.*

(ii) $\frac{\delta f}{\delta t}$ *ist gleichmäßig bezüglich x stetig in t.*

Sei $F(t) := \int_a^b f(x,t)\,dx$. Dann ist $F \in C^1([c,d];\mathbb{R})$ und $F'(t) = \int_a^b \frac{\delta f}{\delta t}(x,t)\,dx$.

Beweis:

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_a^b \underbrace{\frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}}_{\frac{\delta f}{\delta t}(x,t+\theta\cdot h) \text{ mit } \theta=\theta(x,t)\in(0,1)}\,dx =$$

$$\int_a^b \tfrac{\delta f}{\delta t}(x,t)\,dx + \int_a^b \underbrace{[\frac{\delta f}{\delta t}(x,t+\theta h) - \frac{\delta f}{\delta t}(x,t)]}_{|.|\leq\varepsilon \text{ für kleines } h \text{ nach Voraussetzung (ii)}} \quad dx \to \int_a^b \tfrac{\delta f}{\delta t}(x,t)\,dx \ (h \to 0).$$

□

Satz 8.25 (Vertauschen von Integralen; Satz von Fubini für stetige Funktionen).
Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, und $F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$.
Dann ist F stetig, also $F \in R((c,d);\mathbb{R})$ und $\int_c^d F(t)\,dt = \int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dx\,dt = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx$.

Beweis:
Da $[a,b] \times [c,d]$ kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig, d.h.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x_0,t_0),(x,t),\ \sqrt{|x-x_0|^2 + |t-t_0|^2} < \delta : |f(x,t) - f(x_0,t_0)| < \varepsilon$.
Damit ist f in jeder Variablen gleichmäßig bezüglich der anderen Variablen stetig:
$\forall t_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t, |t-t_0| < \delta\ \forall x : |f(x,t) - f(x,t_0)| < \varepsilon$.
$\forall x_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, |x-x_0| < \delta\ \forall t : |f(x,t) - f(x_0,t)| < \varepsilon$.
Nach Satz 8.23 ist F stetig, also $F \in R((c,d);\mathbb{R})$.
Sei $I_1(y) := \int_a^y \int_c^d f(x,t)\,dt\,dx$, $I_2(y) := \int_c^d \underbrace{\int_a^y f(x,t)\,dx}_{=:g(y,t)}\ dt$
Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (8.18) gilt:

$$I_1'(y) = \int_c^d f(y,t)\,dt \tag{1}$$

Es ist $g(y,\cdot) \in C([c,d];\mathbb{R})$ für alle y, $g(\cdot,t) \in C([a,b];\mathbb{R})$ für alle t.
Somit existiert $I_2(y)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (8.18) gilt $\frac{\delta}{\delta y} g(y,t) = f(y,t)$.

$$\text{Nach Satz 8.24 ist } I_2'(y) = \int_c^d \tfrac{\delta}{\delta y} g(y,t)\,dt = \int_c^d f(y,t)\,dt \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $I_1(y) = I_2(y) + const$. Wegen $I_1(a) = I_2(a) = 0$ folgt $I_1(y) = I_2(y)$ für alle $y \in [a,b]$. Für $y = b$ folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 8.26.
Im letzten Beweis haben wir die Kompaktheit von $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ verwendet. Das kann genauso wie in $\mathbb{R}$ (siehe Korollar 4.16) mit Hilfe der Intervallschachtelung bewiesen werden, kommt aber später noch allgemeiner (siehe metrische Räume).

d. Uneigentliche Integrale

Bis jetzt war das Intervall (a,b) beschränkt und der Integrant $f \in R(I;\mathbb{R}) \subset B(I;\mathbb{R})$ beschränkt. Aber z.B. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \notin R((0,1);\mathbb{R})$.

Definition 8.27 (Uneigentliche Integrale)**.**

(a) Sei $a < c < b$ und $f : (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ mit $f \in R((a, c-\varepsilon);\mathbb{R})$, $f \in R((c+\varepsilon, b);\mathbb{R})$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann heißt f (uneigentlich) Integrierbar über (a,b), falls $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)\,dt$ und $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt$ beide existieren.

In diesem Fall setze $\int\limits_a^b f(t)\,dt := \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f + \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f$.

(b) Sei $I = (a;\infty)$ und $f \in R((a,b);\mathbb{R})$ für alle $b > a$.

f heißt integrierbar über (a,∞), falls $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt := \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(t)\,dt$ existiert.

Analog für $I = \mathbb{R}$:
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt := \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 f(t)\,dt + \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b f(t)\,dt$, falls *beide* Limiten existieren.

(c) Falls in (a) nicht beide Grenzwerte existieren, heißt
$p.v. \int\limits_a^b f(t)\,dt := \lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(t)\,dt + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt \right]$
(falls existent) der Cauchy'sche Hauptwert (p.v. = principal value) von $\int\limits_a^b f(t)\,dt$.

Analog $p.v. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt := \lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(t)\,dt$, falls existent.

Beispiel 8.28.

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$ existiert nicht, die Funktion $t \mapsto \frac{1}{t}$ ist nicht in $R((0,1);\mathbb{R})$ und nicht in $R((1,\infty);\mathbb{R})$. Aber $p.v. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}\,dt = 0$, denn $\int\limits_{\varepsilon}^{N} \frac{1}{t}\,dt = -\lim\limits_{-N}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\,dt$,

d.h. $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} \lim\limits_{N\to\infty} \left(\int\limits_{-N}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\,dt + \int\limits_{\varepsilon}^{N} \frac{1}{t}\,dt \right) = 0$.

(b) Für $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ ist $\int\limits_0^\infty \exp((s+it)x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b \exp((s+it)x)\,dx =$ $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{\exp((s+it)x)}{(s+it)}\,\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to 0}\left(\frac{e^{sb}\cdot e^{itb}}{s+it} - \frac{1}{s+it}\right) = \frac{-1}{s+it}\ (|e^{itb}| = 1, e^{sb} \to 0).$
$= \frac{-1}{s+it}\cdot\frac{s-it}{s-it} = \frac{-s+t}{s^2+t^2} = \frac{-s}{s^2+t^2} + i\frac{t}{s^2+t^2}.$
Verwende $\exp((s+it)x) = e^{sx}(\cos(tx) + i\sin(tx))$ und vergleiche Real- und Imaginärteil:
$\int\limits_0^\infty e^{sx}(\cos(tx))\,dx = -\frac{s}{s^2+t^2}, \int\limits_0^\infty e^{sx}(\sin(tx))\,dx = \frac{t}{s^2+t^2}.$

Bemerkung 8.29 (Riemann-Integral)**.**
Wir haben das Integral für Regelfunktionen definiert. Allgemeiner und besser ist das Lebesque-Integral (irgendwann später mal ...). „Dazwischen" liegt das Rieman-Integral.
Dafür betrachtet man Zerlegungen
$Z : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ von (a, b) und Unter- und Obersummen:
$I_Z^{(u)} := \sum\limits_{i=1}^n \left(\inf\limits_{t\in[x_{i-1},x_i)} f(t)\right)\cdot(x_i - x_{-1}).$
$I_Z^{(o)} := \sum\limits_{i=1}^n \left(\sup\limits_{t\in[x_{i-1},x_i)} f(t)\right)\cdot(x_i - x_{-1}).$

Dann heißt f Riemann-integrierbar, falls
$\sup\{I_Z^{(u)} : Z \text{ Zerlegung}\} = \inf\{I_Z^{(o)} : Z \text{ Zerlegung}\} =: \int\limits_a^b f(t)\,dt.$

Jede Regelfunktion ist Riemann-integrierbar (siehe Übungsblatt 11), aber nicht umgekehrt.
Es gelten die üblichen Rechenregeln für das Riemann-Integral.

9. Funktionenreihen

a. Potenzreihen

Wir kommen noch einmal auf Reihen der Form $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zurück.
Die unendliche Reihe ist definiert als Limes der Partialsummen $f(x) = \lim\limits_{N\to\infty} s_N(x)$, $s_N(x) := \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$.

Wichtige Begriffe:
punktweise Konvergenz: $\forall x\; s_N(x) \to f(x)\ (N \to \infty)$.
gleichmäßige Konvergenz: $\|s_N - f\|_\infty = \sup\limits_x |s_N(x) - f(x)| \to 0\ (N \to \infty)$.
absolute Konvergenz: $\forall x : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(x)| < \infty$.
Majorantenkriterium: falls alle f_n stetig und $\|f_n\|_\infty \le c_n$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ absolut und gleichmäßig gegen ein stetiges f. (Lemma 5.20)

Satz 9.1.

(a) Sei $I = (a,b), a,b \in \mathbb{R}$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(I;\mathbb{R})$, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmäßig gegen f. Dann ist $f \in R(I;\mathbb{R})$ und $\int\limits_a^b f(t)\,dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(t)\,dt$.

(b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1([a,b];\mathbb{R})$, und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiere punktweise gegen f, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ konvergiere gleichmäßig. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen f, es gilt $f \in C^1([a,b];\mathbb{R})$, und $f' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ (gleichmäßige Konvergenz).

Beweis:
Satz 8.21 und Satz 8.22, angewendet auf die Partialsummen.

□

Die wichtigste Klasse von Funktionenreihen sind Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Wir betrachten diese in $\mathbb{C}$, d.h. $a_n \in \mathbb{C}$, $z, z_0 \in \mathbb{C}$.
O.E. sei $z_0 = 0$ (sonst Verschiebung), d.h. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
Wieder sei $s_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Setze $B(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ mit $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ (offene Kreisscheibe um a mit Radius r - vergleiche 4.4).

Satz 9.2.
Falls $s_N(z_0) \to f(z_0)$ für ein festes $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so gilt:

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Die Konvergenz ist absolut und gleichmäßig in allen $\overline{B(0, r)}$ mit $r < |z_0|$.

(ii) $f \in C^{\infty}(B(0, |z_0|); \mathbb{C})$, und die k-te Ableitung $s_N^{(k)}$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ in allen $\overline{B(0, r)}$ mit $r < |z_0|$.

(iii) Für alle $[a, b] \subset (-|z_0|, |z_0|) \subset \mathbb{R}$ gilt $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n\, dx$.

Bemerkung:
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist $C^k(\Omega; \mathbb{C}) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} | f$ ist k-mal differenzierbar, $f^{(k)} : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig$\}$ und $C^{\infty}(\Omega; \mathbb{C}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega; \mathbb{C})$.

Beweis:

(i) Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert, gilt $|a_n z_0^n| \to 0$ $(n \to \infty)$.
Damit ist $|a_n z_0^n| \leq 1$ für $n \geq n_0$. Für diese n ist $|a_n z^n| \leq \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \leq \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$. Wegen $\theta := \left(\frac{r}{|z_0|}\right) < 1$ ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} \theta^n$ eine konvergente Majorante.

(ii) $s_N'(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n n z^{n-1}$.
Es gilt $|n a_n z^{n-1}| \leq \frac{n}{|z_0|} \cdot \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^{n-1} \leq \frac{n}{|z_0|} \cdot \theta^{n-1}$, und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|z_0|} \theta^{n-1}$ ist eine konvergente Majorante (konvergent nach dem Quotientenkriterium)

Nach Satz 9.1 (b) ist $\sum_n f_n' = f'$, und $f \in C^1(\overline{B(0,r)};\mathbb{C})$. Da $r < |z_0|$ beliebig war, ist $f \in C^1(B(0,|z_0|);\mathbb{C})$.
Iteration liefert $f \in C^\infty(B(0,|z_0|);\mathbb{C})$, und die Behauptung (ii).

(iii) folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz (i) und Satz 9.1 (a).

□

Satz 9.3 (Abelsche Grenzwertsatz)**.**
Falls $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für ein festes $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ konvergiert, so gilt $f(z_0) = \lim_{r \nearrow 1} f(rz_0)$.

Beweis:

(i) Sei $z_0 = 1$ und $f(z_0) = 0$. Setze $t_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ $(n \geq -1)$.
Dann ist $t_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = f(1) = 0$ und $t_n - t_{n-1} = -a_n$ $(n \in \mathbb{N})$.
Da $\sum a_k$ konvergent ist, gilt $t_n \to 0$ $(n \to \infty)$.
Daher ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ beschränkt, d.h. $\exists k > 0 : |t_n| \leq k$ $(n \in \mathbb{N})$.
Für $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, konvergiert also $\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$, und $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (t_n - t_{n-1}) x^n = \qquad (t_{-1} = 0)$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -f(x) \qquad \text{(Konvergenz nach Satz 9.2)}$$

Für $x \geq 0$ folgt $|f(x)| = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |t_n| \cdot x^n$.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $t_n < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N$. Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2k \cdot N}$.
Dann gilt für $x \in [0,1]$ mit $|x-1| < \delta$:

$$|f(x)| = \underbrace{(1-x)}_{<\delta} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{|t_n|}_{\leq k}}_{\leq kN} x^n + (1-x)\sum_{n=N}^{\infty} \underbrace{|t_n|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}} x^n \leq$$

$$k \cdot N \cdot \delta + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{(1-x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit $|f(x) - \underbrace{f(1)}_{=0}| \leq \varepsilon$, d.h. $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = f(1)$.

(ii) Für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C} \subset \setminus\{0\}$ wende (i) an auf $\widetilde{f}(r) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \cdot r^n - f(z_0) =: \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widetilde{a_n} r^n$ mit $\widetilde{a_n} := \begin{cases} a_n z_0^n & , n \geq 1, \\ a_0 - f(z_0) & , n = 0. \end{cases}$
Es gilt $\widetilde{f}(1) = 0$.

□

Bemerkung 9.4.
Falls $\sum a_n z^n$ für ein $z_0 \neq 0$ konvergiert, so existiert $a := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Denn $|a_n z_0^n| \to 0$, $n \to \infty$, und daher ist $(|a_n z_0^n|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ beschränkt. Also ist $|a_n z_0^n|^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} \cdot |z_0|$ beschränkt und damit existiert $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} := a$.

Definition 9.5 (Konvergenzradius)**.**
Der **Konvergenzradius** r, der Potenzreihe $\sum\limits_{n=}^{\infty} a_n z^n$ ist definiert als

$$r := \begin{cases} 0 & , \text{falls } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \text{ nicht existiert,} \\ \frac{1}{a} & , \text{falls } a := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \text{ existiert und } a \neq 0, \\ \infty & , \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Satz 9.6.
Sei r der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

(a) Für $|z| < r$ konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut.

(b) Für $|z| > r$ divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

(c) Für $|z| = r$ kann die Reihe konvergieren oder divergieren.

Beweis:

(a) Sei $0 < r < \infty$, und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$.
Es ist $\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| \leq a \cdot |z| = \frac{1}{r}|z| < 1$ für großes n.
Nach dem Wurzelkriterum **??** konvergiert die Reihe absolut.
Für $r = \infty$ nehme die gleiche Rechnung, für $r = 0$ ist nichts zu zeigen.

(b) Angenommen, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert für ein z_0 mit $|z_0| > r$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut in $\overline{B(0,\rho)}$ mit $r < \rho < |z_0|$ nach Satz 9.2.
Nach Definition des lim sup (siehe 4.8) existiert eine Teilfolge $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\frac{1}{\rho} < \sqrt[n]{|a'_n|} \to a = \frac{1}{r}$, d.h. für z_1 mit $\rho < |z_1| < |z_0|$ gilt $\sum\limits_{n=0}^{N} |a'nz_1^n| > \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{|z_1|^n}{\rho^n} > \sum\limits_{n=0}^{N} 1 = N+1 \to \infty, N \to \infty$.
Also konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nicht absolut für $z = z_1$ mit $\rho < |z_1| < |z_0|$, Widerspruch zu Satz 9.2.

(c) folgt aus den folgenden Beispielen.

$\square$

Beispiele 9.7.

(a) Geometrische Reihe. Es gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} = \frac{1}{1-z} & , \text{falls } |z| < 1 \\ \textit{divergiert} & , \text{falls } |z| \geq 1 \end{cases}$
Der Konvergenzradius ist 1, und die Reihe divergiert an jedem Randpunkt.

(b) Für $|z| < 1$ gilt $\ln(1+z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j}$.
Denn: $\frac{d}{dz}\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z^{j-1} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz}(-\ln(1-z))$.
An der Stelle $z = 0$ ist $\ln(1-z) = 0 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$. Also
$\ln(1-z) = -\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$ für $|z| < 1$.
Ersetze z durch $-z$:

$$\boxed{\ln(1+z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{z^j}{j}, |z| < 1}$$

An der Stelle $z = 1$ haben wir $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$. Diese Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium (siehe 3.20). Nach dem Abelschen Grenzwertsatz (9.3) gilt

$$\boxed{\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{j+1}}{j}}$$

Beachte, dass wir $\ln(1+z)$ bisher nur für $z \in \mathbb{R}$ definiert haben. Obige Gleichheit gilt also (vorerst) nur für $z \in \mathbb{R}$, $|z| < 1$. Mann kann aber den komplexen Logarithmus $\ln(1+z)$, $|z| < 1$ durch diese Reihe definieren.
Später werden wir $\ln(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ definieren.
Obige Gleichheit gilt dann für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

Die ln-Reihe konvergiert für $z = 1$ und divergiert für $z = -1$ (harmonische Reihe).

(c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Also ist der Konvergenzradius $r = \infty$, und die Konvergenz ist gleichmäßig in allen $\overline{B(0,r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ mit $r > 0$.
Analog sin-, cos-Reihe.

Satz 9.8 (Eindeutigkeitssatz)**.**
Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *für alle* $|z| < \varepsilon$ *konvergent, und es gebe eine Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *mit* $z_n \to 0$ $(n \to \infty)$ *und* $f(z_n) = g(z_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Dann gilt* $a_n = b_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Beweis:
$a_0 = f(0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) =$ (f ist stetig in $B(0,\varepsilon)$)
$\lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(0) = b_0$.
Setze $f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$, $g_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-1}$. Dann ist $f_1(z_n) = \frac{f(z_n)-a_0}{z_n} = \frac{g(z_n)-b_0}{z_n} = g_1(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Wie oben ist $f_1(0) = a_1 = b_1 = g_1(0)$.
Iteration liefert die Behauptung.

□

b. Taylorreihen

Für zweimal differenzierbare f kennen wir schon die Darstellung

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x+\theta\cdot h) \text{ mit } \theta \in (0,1) \text{ (vergleiche Satz 7.17).}$$

Der folgende Satz ist einer der wichtigsten dieser Vorlesung.

Satz 9.9 (Taylorsche Formel)**.**
Sei $f \in C^n([a,b];\mathbb{R})$ und $f^{(n)}$ in (a,b) differenzierbar. Sei $x \in (a,b]$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,x)$ mit

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}_{\text{Taylorpolynom vom Grad } n \text{ zu } f \text{ an der Stelle } a} + \tfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Beweis:
Sei $g(y) := f(x) - \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(y)}{j!}(x-y)^j - m\cdot\frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!}$.
Dann ist $g(x) = 0$. Wähle $m \in \mathbb{R}$ so, dass auch $g(a) = 0$ gilt. g ist in $[a,x]$ stetig, in (a,x) differenzierbar, und
$g'(y) = -\frac{f^{n+1}(y)}{n!}(x-y)^n + m\cdot\frac{(x-y)^n}{n!}$.
(Beachte Produktregel beim Ableiten der Summe)
Nach dem Satz von Rolle (7.11) existiert ein $\xi \in (a,x)$ mit $g'(\xi) = 0$.
Somit ist $m = f^{(n+1)}(\xi)$. Also ist $0 = g(a) = f(x) - \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.
□

Bemerkung 9.10.
Eine andere äquivalente Formulierung lautet

$$\boxed{f(x+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x+\theta\cdot h)}{(n+1)!}}_{=:R_n(x,h) \text{ Restglied}} h^{n+1} \text{ mit } \theta = \theta(a,h,n) \in (0,1)}$$

Diese Darstellung heißt Lagrange-Darstellung des Restglieds.

Satz 9.11. *(zweite Restglieddarstellung)*
Sei $f \in C^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$. Dann ist
$f(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$

Beweis:
Es gilt $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x 1 \cdot f'(t)\,dt =$ (partielle Integration; Stammfunktion zu 1 ist $t-x$)
$f(a) - (x-t)f'(t)|_{t=a}^{x} + \int\limits_a^x (x-t)f''(t)\,dt =$
$f(a) + (x-a)f'(a) - \frac{(x-t)^2}{2}f''(t)|_{t=a}^{x} + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f^{(3)}(t)\,dt =$
$f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} \cdot f''(a) + \dots$
(Stammfunktion zu $\frac{(x-t)^2}{2}$ ist $-\frac{(x-t)^3}{2\cdot 3}$)
Nach n Schritten erhält man die Behauptung.

□

Definition 9.12.
Sei $f \in C^\infty([a,b];\mathbb{R})$. Dann heißt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ die Taylorreihe von f an der Stelle a [um den Entwicklungspunkt a].
Achtung: Über die Konvergenz dieser Reihe ist nichts gesagt.

Beispiel 9.13.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$
Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $f^{(n)}(0) = 0$. Die Taylorreihe zu f an der Stelle 0 ist konstant 0 und hat Konvergenzradius ∞.
Aber f stimmt an keiner Stelle $\neq 0$ mit seiner Taylorreihe überein!

Lemma 9.14.
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, und es gelte für alle $x \in [a,b]$: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Dann ist f in x_0 unendlich oft differenzierbar, und die Reihe ist die Taylorreihe von f, d.h. $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Beweis:
Da die Reihe für alle $x \in [a,b]$ konvergiert, ist der Konvergenzradius der Reihe

> 0. Somit ist $f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}|_{x=x_0} = a_1$.
$f''(x_0) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}|_{x=x_0} = 2 \cdot 1 \cdot a_2$ usw.

□

Lemma 9.15.
Sei $f \in C^\infty([a,b];\mathbb{R})$ mit
$\exists c \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b] : |f^{(n)}(x)| \leq c^n$.
Dann konvergiert die Taylorreihe von f (zu jedem Entwicklungspunkt) gleichmäßig in $[a,b]$ gegen f.

Beweis:
Wegen $|R_n(x,h)| = \left| \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta(x,h,n) \cdot h) \right| \leq \frac{|h|^{n+1} \cdot c^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, n \to \infty$,
gilt $\sup\limits_{x \in [a,b]} \sup\limits_{h \in [0,h_0]} |R_n(x,h)| \to 0, n \to \infty$.

□

Beispiele 9.16.

(a) $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ sind alles Taylorreihen um 0. Hier haben wir gleichmäßige Konvergenz der Taylorreihe gegen die Funktion in jedem Intervall $[-N;N], N > 0$.

(b) $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Taylorreihe um 0, konvergiert für $|x| < 1$ gegen die Funktion (siehe 9.7).

Satz 9.17 (arctan-Reihe).
Für $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$ ist

$$\boxed{\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

Insbesondere ist $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$.

Beweis:
Für $|x| < 1$ ist $\arctan(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\, dt =$ (wegen gleichmäßiger

Konvergenz in $[0,|x|)$) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int\limits_0^x t^{2n}\,dt =$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
Für $x = \pm 1$ ist die Reihe konvergent nach dem Leibniz-Kriterium (3.20), somit gleich $\arctan(\pm 1)$ nach dem Abelschen Grenzwertsatz.
Wegen $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ folgt die Darstellung von $\frac{\pi}{4}$.

□

Satz 9.18 (Binomialreihe)**.**
Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\binom{\alpha}{n} := \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{a-k+1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$ der Binomialkoeffizient.
Dann gilt für $|x| < 1$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n}$$

Beweis:

(i) Sei $f(x) := (1+x)^\alpha$. Dann ist $f^{(n)}(0) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}|_0$
D.h. $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$, also ist die obige Reihe die Taylorreihe um 0.

(ii) Für $\alpha \notin \mathbb{N}$, $x \neq 0$ und $a_n := \binom{\alpha}{n}x^n$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \underbrace{\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|}_{\to 1}\cdot|x| \to |x| < 1$ für $n \to \infty$,
d.h. nach dem Qutientenkriterium konvergiert die Reihe absolut.

(iii) Restgliedabschätzung für $x \in [0,1)$: nach Satz 9.11 gilt $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = (n+1)\cdot\binom{\alpha}{n+1}\int\limits_0^x(x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt$ (*)

Sei $C := \max\{1,(a+x)\alpha\}$. Dann gilt für $0 \le t \le x$:
$0 \le (1+t)^{\alpha-n-1} \le (1+t)^\alpha \le C$, d.h.
$|R_n(x)| \le (n+1)\cdot\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|\cdot C\cdot\int\limits_0^x(x-t)^n\,dt = C\cdot\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|\cdot x^{n+1} = C\cdot|a_{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$ (nach (ii)).

(iv) Restgliedabschätzung für $x \in (-1,0)$:

$|R_n(x)| = (n+1)\cdot\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|\cdot\left|\int\limits_0^{|x|}\underbrace{(x+t)^n}_{(|x|-t)^n\cdot(-1)^n}(1-t)^{\alpha-n-1}\,dt\right|$ (Substitution $t \mapsto -t$ in (iii))

$= (n+1) \cdot \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cdot \int\limits_0^{|x|} \left(\frac{|x|-t}{1-t}\right)^n \cdot (1-t)^\alpha < 1 \, dt$

Die Funktion $t \mapsto \frac{|x|-t}{1-t}$ ist monoton fallend in $[0, |x|]$, also $\leq |x|$.

Somit $|R_n(x)| \leq (n+1) \cdot \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cdot |x|^n \cdot \underbrace{\int\limits_0^{|x|} (1-t)^{\alpha-1} \, dt}_{=:C_1} \leq C_1 \cdot (n+1) \cdot \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \cdot |x|^n =$

$C_1 \cdot |\alpha| \cdot \left|\binom{\alpha-1}{n}\right| \cdot |x|^n \to 0$ für $n \to \infty$ (wie in (iii)).

$\square$

c. Der Weierstraß'sche Approximationssatz

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Es soll untersucht werden, ob sich jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch Polynome approximieren lässt.

Definition 9.19 (Bernstein-Polynom).
Zu $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt
$(P_n f)(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$
das **Bernstein-Polynom der Ordnung** n **zu** f.

Lemma 9.20.
Für $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ gilt folgende Tabelle:

$f(x) = 1$	$f(x) = x$	$f(x) = x(x-1)$
$P_n f(x) = 1$	$P_n(x) = x$	$P_n(x) = (1 - \frac{1}{n})x(1-x)$

Beweis:

(a) $f(x) = 1$: $P_n f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$.

(b) $f(x) = x$: $P_n f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k \cdot n!}{n \cdot k! \cdot (n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} = x \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k} = x \cdot (x + (1-x))^{n-1} = x$.

(c) $f(x) = x(1-x)$: $P_n f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k) \cdot n!}{n^2 k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k} =$

$$\frac{n-1}{n} \cdot x(1-x) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}}_{=\binom{n-2}{k-1}} x^{k-1}(1-x)^{n-1-k} =$$

$$\frac{n-1}{n} \cdot x(1-x) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k} = \frac{n-1}{n}x(1-x).$$

□

Lemma 9.21.
Für $x \in [0, 1]$ gilt $0 \leq \sum\limits_{k=0}^{n} (x - \frac{k}{n})^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n}$.

Beweis:
$\sum\limits_{k=0}^{n}(x-\frac{k}{n})^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x^2\cdot 1 - 2x\cdot x + \sum\limits_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{k^2}{n^2}}_{=-\frac{k(n-k)}{n^2}+\frac{k}{n}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} =$
$x^2 - 2x^2 < \frac{n-1}{n}\cdot x(1-x) + x = -x^2 - (1-\frac{1}{n})(x-x^2) + x = \frac{1}{n}x(1-x) \in [0, \frac{1}{4n}]$, da $x(1-x)\in[0,\frac{1}{4}]$ für $x\in[0,1]$.

□

Satz 9.22 (Weierstraß'scher Approximationssatz)**.**
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h. es gilt $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)| \to 0$ für $n\to\infty$.

Beweis:

(i) Sei $[a,b]=[0,1]$. Setze $f_n := P_nf$ (Bernstein-Polynome). Zu $\varepsilon>0$ wähle $\delta>0$ mit $\forall x,y\in[0,1]$, $|x-y|<\delta : |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ (f ist gleichmäßig stetig, da $[0,1]$ kompakt).

Zu einem festen $x\in[0,1]$ ist $|f(x)-f_n(x)| \le \sum\limits_{k=0}^{n}|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)|\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.
Definiere $A_n := \{k\in\{0,\dots,n\} : |x-\frac{k}{n}|<\delta\}$, $B_n := \{0,\dots,n\}\setminus A$ für $n>\frac{1}{\delta}$.
Für $k\in B_n$ ist $|x-\frac{k}{n}|\ge\delta$, d.h. $\delta^2\le(x-\frac{k}{n})^2$ und damit $|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)| \le |f(x)|+|f\left(\frac{k}{n}\right)| \le 2\cdot\|f\|_\infty \le \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\cdot(x-\frac{k}{n})^2$
Für $k\in A_n$ ist $|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)|<\varepsilon$ nach Wahl von δ.
Damit $|f(x)-f_n(x)| \le \varepsilon\cdot\underbrace{\sum\limits_{k\in A_n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\le\sum_{k=0}^{n}\dots=1} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\underbrace{\sum\limits_{k\in B_n}(x-\frac{k}{n})^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}_{\le\sum_{k=0}^{n}\dots\le\frac{1}{4n}\text{ (nach Lemma 9.21)}} \le$
$\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\cdot\frac{1}{4} < 2\varepsilon$ falls n groß genug $(\frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\cdot\frac{1}{4}<\varepsilon)$.
Damit $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-f_n(x)|<2\varepsilon$ für hinreichend großes n. Somit $\|f-f_n\|_\infty\to 0$ $(n\to\infty)$.

(ii) Für beliebige Intervalle $[a,b]$ betrachte $\widetilde{f}(x) := f(a+x(b-a))$, $x\in[0,1]$ und $\widetilde{f_n}(x) := (P_n\widetilde{f})(x)$ $(x\in[0,1])$.

□

10. Orthonormalsysteme und Fourier-Reihen

Sei V ein K-Vektorraum ($K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $\langle .,. \rangle : V \times V \to K$ ein Skalarprodukt, d.h.

(i) $\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \alpha_1 \langle f_1, g \rangle + \alpha_2 \langle f_2, g \rangle$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in K, f_1, f_2, g \in V)$,

(ii) $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$ $(f, g \in V)$,

(iii) $\langle f, f \rangle \geq 0$ $(f \in V)$, $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Bemerkung:
Für $K = \mathbb{C}$ heißt (iii): $\langle f, f \rangle \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Falls $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt ist, so ist $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ eine Norm auf V.

Beispiel 10.1 (L_2-Skalarprodukt).
Die Abbildung $\langle .,. \rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{C}$
$\langle f, g \rangle_{L_2} := \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$ ist ein Skalarprodukt.

Dabei sind (i) und (ii) klar. Es ist $\langle f, f \rangle = \int\limits_a^b f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx \geq 0$.

Es gilt $\int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
(Angenommen, $f \neq 0$, d.h. es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$. Da f stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(x_0)| > 0$ $(x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$.
Damit ist $\int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx \geq \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left(\frac{1}{2}|f(x_0)|\right)^2 dx = 2\varepsilon \cdot \frac{1}{4}|f(x_0)|^2 > 0$, Widerspruch)

Definiere $\|f\|_{L_2} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2}}$ (Norm). Sei $\mathcal{L}_2([a,b])$ der Abschluss von $C([a,b])$ bezüglich $\|\cdot\|_{L_2}$, d.h. $\mathcal{L}_2([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b]) : \|f - f_n\|_{L_2} \to 0, n \to \infty\}$.

Hier und in den folgenden 9 Semestern ist $C([a,b]) := C([a,b]; \mathbb{C})$.

Satz 10.2.

(a) *Die Funktion $e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx)$, $(x \in [0, 2\pi]), n \in \mathbb{Z}$, bilden ein Orthonormalsystem in $\mathcal{L}_2([0, 2\pi])$ bezüglich $\langle .,. \rangle_{L_2}$, d.h. $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm} := \begin{cases} 1 & , n = m, \\ 0 & , n \neq m. \end{cases}$*

(b) *Für $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(lx)\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(lx)\,dx = \pi \cdot \delta_{kl}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\,dx = \pi\delta_{kl}.$$

Beweis:

(a) $\langle e_n, e_n\rangle_{L_2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\Big|_0^{2\pi} =$ $(n \neq m)$
$\frac{1}{2\pi i(n-m)}(\underbrace{e^{i2\pi(n-m)}}_{=1} - 1) = 0.$

$n = m$: $\langle e_n, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dx = 1.$

(b) wie in (a) unter Verwendung der Additionstheoreme $\cos(u)\cdot\sin(v) = \frac{1}{2}(\sin(u+v) - \sin(u-v)), \ldots$

□

Definition 10.3.
Sei $f \in C([0, 2\pi])$. Dann heißt $f_k := \langle f, e_k\rangle_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$ der k-te (komplexe) **Fourierkoeffizient** von f, und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}$ die **Fourierreihe** von f

Satz 10.4.
Sei $f \in C([0, 2\pi])$. Dann gilt $\|f - \sum_{k=-n}^{n} f_k e_k\|_{L_2}^2 = \|f\|_{L_2}^2 - \sum_{k=-n}^{n} |f_k|^2$.
Insbesondere gilt die Bessel'sche Ungleichung:

$$\sum_{k=-n}^{n} |f_k|^2 \leq \|f\|_{L_2}^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

d.h. die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2$ konvergiert.

Beweis:
Sei $g := \sum_{k=-n}^{n} f_k e_k$. Dann ist $\langle f, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{f_k} \underbrace{\langle f, e_k\rangle}_{=f_k} = \sum_{k=-n}^{n} |f_k|^2$.

$\langle g, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{f_k}\langle g, e_k\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{f_k} \cdot \sum_{j=-n}^{n} f_j \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{=\delta_{jk}} = \sum_{k=-n}^{n} |f_k|^2$.

Damit $\|f-g\|_{L_2}^2 = \langle f-g, f-g\rangle = \langle f,f\rangle - \langle f,g\rangle - \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle = \|f\|_{L_2}^2 - \sum_{k=-n}^{n} |f_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |f_k|^2 = \|f\|_{L_2}^2 - \sum_{k=-n}^{n} |f_k|^2$.

□

Definition und Satz 10.5.
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{L}_2([0,2\pi])$. Zu $f \in \mathcal{L}_2([0,2\pi])$ sei $f_n := \langle f, u_n\rangle_{L_2}$ der (verallgemeinerte) n-te Fourierkoeffizient von f. Dann sind äquivalent:

(i) $\forall f \in \mathcal{L}_2 : \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 = \|f\|_{L_2}^2$ *(Parseval'sche oder Bessel'sche Gleichung),*

(ii) $\forall f \in \mathcal{L}_2 : \|s_N - f\|_{L_2} \to 0$ $(N \to \infty)$, *wobei* $s_N := \sum_{n=1}^{N} f_n u_n$,

(iii) Falls $f \in \mathcal{L}_2$ *mit* $f_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, *so ist* $\|f\|_{L_2} = 0$.

In diesem Fall heißt $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) oder eine (Hilbertraum-)Basis von $\mathcal{L}_2([0,2\pi])$.

Bemerkung:
Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt.

Beweis:
(i) ⇔ (ii):
folgt aus Satz 10.4 (für beliebige ONS $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) ⇒ (iii):
es gilt $\|f\|_{L_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 = 0$, da alle $f_n = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii):

sei $f \in \mathcal{L}_2$. Es gilt $\|s_N - s_M\|_{L_2}^2 = \sum\limits_{n=N+1}^{M} |f_n|^2 \to 0$ $(N, M \to \infty)$ nach Satz 10.4. Da $\mathcal{L}_2$ vollständig ist, existiert $\widetilde{f} := \lim\limits_{N\to\infty} s_N \in \mathcal{L}_2$.

Für $g := f - \widetilde{f}$ gilt $g_n = \langle g, u_n \rangle = \underbrace{\langle f, u_n \rangle}_{=f_n} - \langle \widetilde{f}, u_n \rangle = f_n - \langle \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j u_j, u_n \rangle =$

$$f_n - \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\langle f_j u_j, u_n \rangle}_{=f_j \langle u_j, u_n \rangle = f_j \delta_{jn}} - \underbrace{\langle \sum_{j=N+1}^{\infty} f_j u_j, u_n \rangle}_{(*)= \lim\limits_{M\to\infty} \sum\limits_{j=N+1}^{M} f_j \underbrace{\langle u_j, u_n \rangle}_{=0}} .$$

(*): das Skalarprodukt ist stetig.

Also ist $g_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Nach Voraussetzung ist $\|g\|_{L_2} = 0$, d.h. $\|f - s_N\|_{L_2} = \|g + \widetilde{f} - s_N\|_{L_2} \leq \|g\|_{L_2} + \|\widetilde{f} - s_N\|_{L_2} = \|\widetilde{f} - s_N\|_{L_2} \to 0, N \to \infty$.

$\square$

Satz 10.6.

(a) Für $x \in (0, 2\pi)$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$,

(b) Für $x \in (0, 2\pi)$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$.

(c) Für $x \in [0, 2\pi)$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$.

Für $x = 0$ erhalten wir $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

Beweis:

(a) $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{1}{2} e^{-inx} \sum\limits_{k=0}^{2n} (e^{ix})^k = \frac{1}{2} e^{-inx} \frac{1 - e^{(2n+1)ix}}{1 - e^{ix}} = \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$.

(b) Es gilt $\int\limits_{\pi}^{x} \cos(kt)\, dt = \frac{\sin(kx)}{k}$. Damit $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \int\limits_{\pi}^{x} \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2} \right) dt = -\frac{x-\pi}{2} + \int\limits_{pi}^{x} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}\, dt$.

Sei $f(t) := \frac{1}{\sin(2\sin(\frac{t}{2}))}$. Dann ist für $0 < x < 2\pi$ $f \in C^1([\pi, x])$ bzw. $f \in C^1([x,\pi])$.
Damit $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = -\frac{x-\pi}{2} - f(t)\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}}\Big|_{\pi}^{x} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int\limits_{\pi}^{x} \cos(n+\frac{1}{2})t f'(t)\,dt.$
D.h. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} - \left(-\frac{x-\pi}{2}\right)\right| \le (2\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \cdot |\pi - x|) \cdot \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \to 0, n \to \infty.$

(c) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig, und die Reihe der Ableitungen konvergiert nach (b) gleichmäßig in $[\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$ gegen $\frac{x-\pi}{2}$.
Damit $\frac{d}{dx}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{x-\pi}{2}$, d.h. für $F(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.
Es gilt $\int\limits_0^{2\pi} F(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,dx = 0$, aber auch $\int\limits_0^{2\pi} F(x)\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 dx + \int\limits_0^{2\pi} c\,dx = \frac{\pi^3}{6} + 2\pi c$, damit $c = -\frac{\pi^2}{12}$. Damit folgt die Behauptung für $x \in (0, 2\pi)$.
Da beide Seiten stetig in $x = 0$ sind, folgt die Behauptung auch für $x = 0$.

□

Satz 10.7.
Das ONS $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ ist vollständig in $\mathcal{L}_2([0, 2\pi])$.

Beweis:

(i) Sei $f = \chi_{[0,a)}$ für $a \in [0, 2\pi]$. Dann ist

$$f_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot a & , k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^a e^{ikx}\,dx = \frac{i}{ikx}(e^{ikx} - 1) & , k \neq 0 \end{cases}$$

Für $k \neq 0$ ist $|f_k|^2 = f_k \cdot \overline{f}_k = \frac{1}{2\pi k^2}(e^{-ika} - 1)(e^{ika} - 1) = \frac{1-\cos(ka)}{\pi k^2}$.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 = \frac{a^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(ka)}{k^2} = \frac{a^2}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(ka)}{k^2} = \tag{10.6}$$

$\frac{a^2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\pi-a}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}\right) = a = \int\limits_0^a 1^2\,dx = \|f\|_{L_2}^2.$
Nach Satz 10.4 gilt $\|s_N(f) - f\|_{L_2} \to 0, N \to \infty$.

(ii) Sei $f \in T([0, 2\pi])$. Dann lässt sich f schreiben als $f = \sum\limits_{j=1}^{r} \gamma_j h_j$, $\gamma_j \in \mathbb{C}$, $h_j = \chi_{[0,a_j]}$, $a_j \in [0, 2\pi]$ (Gleichheit bis auf Sprungstellen).
Damit gilt $s_N(f) = \sum\limits_{j=1}^{r} \gamma_j s_N(h_j) \to \sum\limits_{j=1}^{r} \gamma_j h_j = f$ in $\|\cdot\|_{L_2}$, $N \to \infty$.

(iii) Wegen $\overline{T([0,2\pi])}^{\|\cdot\|_\infty} = R([0,2\pi]) \supset C([0,2\pi])$ gilt auch $\overline{T([0,2\pi])}^{\|\cdot\|_{L_2}} \supset \overline{C([0,2\pi])}^{\|\cdot\|_{L_2}} = \mathcal{L}_2([0,2\pi])$.
Also liegen die Treppenfunktionen dicht in $\mathcal{L}_2([0,2\pi])$ bezüglich $\|\cdot\|_{L_2}$, d.h.
für $f \in \mathcal{L}_2 : \|f - s_N(f)\|_{L_2} \leq \underbrace{\|f-g\|_{L_2}}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } g\in T([0,2\pi]) \text{ geeignet}} + \|g - s_N(g)\|_{L_2} + \underbrace{\|s_N(g) - s_N(f)\|_{L_2}}_{\leq \|g-f\|_{L_2}}$
für $N \in \mathbb{N}$ genügend groß.
Somit ist $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ Basis.

$\square$

11. Metrische Räume

Definition 11.1 (Metrik, metrischer Raum)**.**
Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty)$ heißt **Metrik auf** X, falls

(1) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$,

(2) $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(3) $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

In diesem Fall heißt dann (X, d) **metrischer Raum**.

Beispiele 11.2.

1. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x - y|$
2. $X \neq 0$ beliebige Menge. $d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$ „diskrete Metrik“.
3. Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter K- Vektorraum. Dann definiert $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf X.
   Insbesondere erhält man für $X = K^n$ und die euklidische Norm $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ die euklidische Metrik.
4. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $M \subset X$, dann ist $(M, d|_{M \times M})$ metrischer (Teil-)Raum.

Definition 11.3.
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt Cauchy-Folge, falls $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0(\varepsilon) \, \forall n, m > n_0(\varepsilon) :$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

(b) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt konvergent gegen $x_0 \in X$, falls $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0(\varepsilon)$ $\forall n > n_0(\varepsilon) : d(x_n, x_0) < \varepsilon$ (Schreibweise: $x_n \to x_0$)

(c) (X, d) (bzw. X) heißt vollständig, falls jede Chauchy-Folge konvergent ist.

Lemma 11.4.
K^n mit der euklidischen Metrik ist vollständig.

Beweis:
Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subset K^n$ eine Cauchy-Folge, dann:
$d(x^{(k)}, x^{(m)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i^{(m)}|^2} \geq |x_j^{(k)} - x_j^{(m)}|$, $j = 1, \ldots, n$
$\Rightarrow \forall j = 1, \ldots, n : (x_j^{(k)}) \subset K$ ist Cauchy-Folge, also konvergent.
$x_j := \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)}$. Setze $x := (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, dann:
$d(x^{(k)}, x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_j|^2} \to 0$ für $k \to \infty$.

□

Sei ab jetzt (X, d) ein metrischer Raum.

Definition 11.5.

(a) Zu $x \in X$, $r > 0$ heißt $B(x, r) := \{y \in X | d(x, y) < r\}$ **offene Kugel** um x mit Radius r.

(b) $M \subset X$, $x \in M$. Dann heißt x **innerer Punkt** von M, falls $r > 0$ existiert, mit $B(x, r) \subset M$.
$\mathring{M} := \{x \in M | x$ ist innerer Punkt von $M\}$. Dann heißt M **offen**, falls $M = \mathring{M}$, bzw. **abgeschlossen**, falls $X \setminus M$ offen.
$\overline{x}$ heißt Häufungspunkt von M, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \setminus \{\overline{x}\}$ existiert mit $x_n \to \overline{x}$.

Der Abschluss $\overline{M}$ von M ist erklärt durch $\overline{M} := M \cup \{\overline{x} \in X | \overline{x}$ ist Häufungspunkt von $M\}$.

$\widetilde{x} \in X$ heißt Randpunkt von M, falls $\forall \varepsilon > 0 : B(\widetilde{x}, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ und $B(\widetilde{x}, \varepsilon) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$.

$\delta M := \{\widetilde{x} \in X | \widetilde{x}$ ist Randpunkt von $M\}$ heißt **Rand von** M.

(c) $M \subset X$ heißt **Umgebung** von $x \in X$, falls $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset M$.

Lemma 11.6.
Sei $\mathcal{T}_d := \{U \subset X | U$ ist offen$\}$ $(\subset \mathcal{P}(X))$, dann gelten:
(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$,
(T2) $U, V \in \mathcal{T}_d \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_d$,

(T3) Sei I eine beliebige (Index-)Menge und $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}_d$ eine Familie offener Mengen. Dann gilt: $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_d$.

Beweis:
(T1) klar.

zu (T2):
Sei $x \in U \cap V$. Dann: $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 : B(x, \varepsilon_1) \subset U$, $B(x, \varepsilon_2) \subset V$. Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset U \cap V$.

zu (T3):
Sei $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists i_0 : x \in U_{i_0} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

□

Damit ist $\mathcal{T}_d$ eine sogenannte Topologie:

Definition 11.7.

(a) Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen von X mit (T1), (T2), (T3) (siehe Lemma 11.6). Dann heißt $\mathcal{T}$ eine **Topologie** auf X und $(X, \mathcal{T})$ **topologischer Raum**.

Wir nennen $U \in \mathcal{T}$ offene Teilmengen von X.

$V \subset X$ heißt Umgebung zu $x \in X$, falls: $\exists U \in \mathcal{T} : x \in U \subset V$.

(b) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann heißt $(X, \mathcal{T})$ **Hausdorff-Raum**, falls $\forall x, y \in X, x \neq y \; \exists U, V \in \mathcal{T} : x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$.

Beispiele:

1. X beliebig, $\mathcal{T}_1 := \{\emptyset, X\}$ (triviale Topologie).
   Speziell: $X := \{0, 1\}$, dann ist $(X, \mathcal{T}_1)$ ist *kein* Hausdorff-Raum.

2. X beliebig, $\mathcal{T}_2 := \mathcal{P}(X)$ (diskrete Topologie).
   Speziell: $X := \{0, 1\}$, dann ist $(X, \mathcal{T}_2)$ *ist* ein Hausdorff-Raum.

   Sei d die diskrete Metrik, dann gilt: $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_d$.

BEMERKUNG 11.8.
Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann ist (X, d) ein Hausdorff-Raum.

BEWEIS:
$x \neq y$: $x \in B(x, \frac{d(x,y)}{2})$, $y \in B(y, \frac{d(x,y)}{2})$.
$B(x, \frac{d(x,y)}{2}) \cap B(y, \frac{d(x,y)}{2}) = \emptyset$.

$\square$

KLEINER ÜBERBLICK:

- Normierte Räume: X: K-Vektorraum, $\|\cdot\| X \to [0, \infty)$ und (N1), (N2), (N3) (siehe 4.2),
- Metrische Räume: X Menge, $d : X \times X \to [0, \infty)$ und (M1), (M2), (M3) (siehe 11.1),
- Topologische Räume: X Menge, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ und (T1), (T2), (T3) (siehe 11.7).

DEFINITION 11.9.

(a) Seien (X, d_x), (Y, d_y) metrische Räume, dann heißt $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ stetig in $x \in X$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X, d_x(x_0, x) < \delta : d_y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. (*)
f heißt stetig, wenn f stetig in allen $x_0 \in X$ ist.
Bezeichnung: $f \in C(X; Y)$.

Analog zu normierte K-Vektorräumen ist „gleichmäßige Stetigkeit" erklärt.

(*) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$

(b) Seien $(X, \mathcal{T}_x)$, $(Y, \mathcal{T}_y)$ topologische Räume. Dann ist $f : (X, \mathcal{T}_x) \to (Y, \mathcal{T}_y)$ stetig, falls
$\forall V \in \mathcal{T}_y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_x$. („Urbilder offener Mengen sind offen")

SATZ 11.10.
Seien (X, d_x), (Y, d_y) metrische Räume, $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig.

(ii) Für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $x_n \to x_0 \in X$ gilt $f(x_n) \to f(x_0) \in Y$.

(iii) Für alle offenen Mengen $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U) \subset Y$ offen.

(iv) Für alle abgeschlossenen $V \subset Y$ ist $f^{-1}(V) \subset X$ abgeschlossen.

Beweis:
(i) $\Leftrightarrow$ (ii):
vergleiche 5.7.

(i) $\Rightarrow$ (iii):
Sei $x_0 \in f^{-1}(U)$ offen.
Da U offen: $\exists \varepsilon > 0 : B(f(x_0), \varepsilon) \subset U$.
Weil f stetig: $\exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset U$. $\Rightarrow B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i):
Sei $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Es ist $B(f(x_0), \varepsilon)$ offen.
$\Rightarrow f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ offen.
$\Rightarrow \exists \delta > 0 : (B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$
$\Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv):
Folgt mit dem Komplement (vergleiche Übungsaufgabe 7.3).

$\square$

Beispiele 11.11.

1. $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, jeweils mit der euklidischen Metrik.
   Sei $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y_2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$
   Für $\alpha, r \in \mathbb{R} \in \{0\}$, dann
   $f(r, \alpha r) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \nrightarrow 0$ für $r \to 0$.
   $\Rightarrow f$ ist nicht stetig in $(0, 0)$.
   Allerdings ist f „partiell“ stetig in $(0, 0)$
   d.h. $x \mapsto f(x, 0) = 0$
   und $y \mapsto f(0, y) = 0$
   sind stetig.

2. Sei X mit der trivialen Topologie $\mathcal{T}_1 := \{\emptyset, X\}$ und $Y = \mathbb{R}$ mit euklidischer Metrik. Dann:
   $f : X \to \mathbb{R}$ ist stetig $\Leftrightarrow$ f ist konstant.
   (einzige abgeschlossene Mengen in X sind $\{X, \emptyset\} \Rightarrow \forall r \in \mathbb{R} : f^{-1}(\{r\}) \in \{X, \emptyset\}$, da $\{r\}$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist)

3. Seien $(X, \mathcal{P}(X))$, $(Y, \mathcal{T}_y)$ topologische Räume.
   Dann sind *alle* $f : X \to Y$ stetig.

Im Folgenden seien (X, d_x), (Y, d_y) metrische Räume.
$K \subset X$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche (offene) Teilüberdeckung von K besitzt.

Satz 11.12.
Sei $f : X \to Y$ stetig, $K \subset X$ kompakt, dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis:
Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K) \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.
$\Rightarrow K \subset \bigcup f^{-1}(U_i)$
K kompakt, also $\exists N \in \mathbb{N}$:
$K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} f^{-1}(U_{i_n})$
$\Rightarrow f(K) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} U_{i_n}$.
Also $f(K)$ kompakt. □

Satz 11.13.

(a) Sei $K \subset X$ kompakt, dann ist K beschränkt und abgeschlossen.
  (Umkehrung gilt nicht!)

(b) Sei $K \subset X$ kompakt, $A \subset K$ abgeschlossen, dann ist A kompakt.

(c) Sei $f \in C(X;Y)$ und K kompakt, dann $f(K)$ abgeschlossen und beschränkt und $f|_K$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis:

(a) Vergleiche Satz 4.12.

(b) Vergleiche Satz 4.15.

(c) Vergleiche Satz 5.13.

□

Definition 11.14.
Sei (X, d) ein metrischer Raum (oder sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum).
Dann heißt X **zusammenhängend**, falls es kein $A \subset X$ gibt mit $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$ und A abgeschlossen und offen.

Bemerkung 11.15.
X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow \nexists A, B$ offen: $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$.
X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow \nexists A, B$ abgeschlossen: $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$.

Beispiele:

1. $\mathbb{R}$ (mit euklidischer Metrik) ist zusammenhängend.
2. $(\underbrace{[0,1] \cup [2,3]}_{=:X}, |\cdot|)$ ist nicht zusammenhängend, denn:
   $A := [0,1]$ und $B := [2,3]$ sind abgeschlossen (und offen in X).

Satz 11.16 (Zwischenwertsatz)**.**
Sei X ein zusammenhängender metrischer (bzw. topologischer) Raum, $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis:
Sei $f(X) = A \cup B$, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, A, B offen.
$\Rightarrow X = \underbrace{f^{-1}(A)}_{=:A'} \cup \underbrace{f^{-1}(B)}_{=:B'}$, $A', B' \neq \emptyset$, $A' \cap B' = \emptyset$, A', B' offen (da f stetig) $\to$ Widerspruch.

$\square$