Skript zur Vorlesung

Analysis II

Sommersemester 2005

Universität Konstanz
Prof. Dr. Robert Denk

private Mitschrift

Stand: 14. Januar 2006
www.meidert.net/uni

Achtung:
Dies ist kein offizielles Skript, sondern nur eine private Mitschrift. Ich kann daher keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit übernehmen. Vor allem können die Nummerierungen zum Teil von den in den Vorlesungen verwendeten abweichen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so möge er/sie mir bitte eine eMail schicken - vielen Dank!

Frieder Meidert (uni@meidert.net)

Inhaltsverzeichnis

1 Die Topologie des $\mathbb{R}^n$ . . . 1

a $\mathbb{R}^n$ als normierter Vektorraum . . . 1

b Stetige Funktionen in metrischen Räumen . . . 6

c Lineare Abbildungen in normierten Räumen . . . 10

2 Differenzieren im $\mathbb{R}^n$ . . . 12

3 Mittelwertsatz und höhere Ableitungen . . . 19

4 Lokale Umkehrbarkeit . . . 28

a Der Banachsche Fixpunktsatz . . . 28

b Lokale Umkehrbarkeit . . . 29

c Der Satz über implizite Funktionen . . . 31

5 Extrema unter Nebenbedingungen . . . 34

6 Kurven und Flächen . . . 39

7 Riemann-Integral und Jordan-Inhalt . . . 48

8 Sätze zur Integration . . . 59

a Der Satz von Fubini . . . 59

b Der Transformationssatz . . . 64

9 Kurvenintegrale . . . 67

10 Integration auf Untermannigfaltigkeiten . . . 74

a Untermannigfaltigkeit . . . 74

b Maßtensor und Integration . . . 77

c Anwendungen und Beispiele . . . 81

11 Die Sätze von Gauß und Stokes . . . 84

a Einige geometrische Begriffe . . . 84

b Der Satz von Gauß . . . 87

c Der Satz von Stokes . . . 93

12 Zusammenfassung . . . 96

1. Die Topologie des $\mathbb{R}^n$

a. $\mathbb{R}^n$ als normierter Vektorraum

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir schreiben Vektoren des $\mathbb{R}^n$ in der Form $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Der transponierte Vektor x^t ist definiert als $x^t = (x_1, \dots, x_n)$. Das (Standard-)Skalarprodukt ist $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t \cdot y$. Die euklidische Norm $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ macht $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ zu einem normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wie bisher bezeichne $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ die offene Kugel ($x \in \mathbb{R}^n, r > 0$).

Bemerkung 1.1.

(a) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann:
$x^{(k)} \to x$ $(k \to \infty) \Leftrightarrow |x^{(k)} - x| \to 0$ $(k \to \infty) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} : |x_i^{(k)} - x_i| \to 0$ $(k \to \infty)$.

(b) Sei $(V, \|\cdot\|)$ normiert. Dann ist $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ stetig.

Definition 1.2.

(a) (l_p-Norm auf $\mathbb{R}^n$). Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze $\|x\|_p := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \le p < \infty)$ (l_p-Norm),
$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ (Maximumsnorm oder l_∞-Norm).

(b) Definiere die l_p-Räume $(1 \le p \le \infty)$ durch
$l_p := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_p := \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, 1 \le p < \infty,$
$l_\infty := \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i| =: \|x\|_\infty < \infty\}.$

(c) Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Zu $f \in R(\bar{I}; \mathbb{C})$ definiere
$\|f\|_p := \left(\int\limits_I |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty,$
$\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$. ($L_p$-Norm, $1 \le p \le \infty$).

Satz 1.3.
Sei $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(wobei* $\frac{1}{\infty} = 0$*). Seien* $f, g \in R(\bar{I}; \mathbb{C})$.

(a) *Young'sche Ungleichung:*
Für $\alpha, \beta \geq 0$ und $1 < p < \infty$ gilt

$$\alpha\beta \leq \tfrac{\alpha^p}{p} + \tfrac{\beta^q}{q}.$$

(b) *Hölder'sche Ungleichung:*
Für $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x \in l_p$, $y \in l_q$ ist
$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq ||x||_p \cdot ||y||_q$
$\int\limits_I |f \cdot g| \leq ||f||_p \cdot ||g||_q.$

(c) *Minkowski-Ungleichung:*
Für $x, y \in l_p$ gilt $||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p$, $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$.

Beweis:

(a) Übung

(b) Für $p = 1$ oder $p = \infty$ oder $q = 1$ oder $q = \infty$ oder $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Behauptung klar.
Sonst setze $\alpha := \frac{|x_i|}{||x||_p}$, $\beta := \frac{|y_i|}{||y||_q}$, $i \in \mathbb{N}$ fest.
Nach (a) folgt $\frac{|x_i| \cdot |y_i|}{||x||_p ||y||_p} \leq \frac{|x_i|^p}{p \cdot ||x||_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \cdot ||y||_q^q}$
Summiere über i: $\frac{\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \cdot |y_i|}{||x||_p \cdot ||y||_q} \leq \frac{||x||_p^p}{p \cdot ||x||_p^p} + \frac{||y||_q^q}{q \cdot ||y||_q^q} = 1.$
Für die zweite Behauptung setze $\alpha := \frac{|f(x)|}{||f||_p}$, $\beta := \frac{|g(x)|}{||g||_q}$.

(c) Für $p = 1$ oder $p = \infty$ ist die Behauptung klar. Sonst schreibe $||x+y||_p^p = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i| + \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |y_i| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{(p-1) \cdot q} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(||x||_p + ||y||_p \right) =$
$\underbrace{||x + y||_p^{\frac{p}{q}}}_{||x+y||^{p-1}} \cdot (||x||_p + ||y||_p)$ $\qquad ((p-1)q = p)$
Durch Teilen mit $||x + y||^{p-1}$ erhält man die Behauptung. Für Funktionen geht's genauso.

□

Bemerkung:
Die Ungleichungen gelten auch für $x, y \in \mathbb{R}^n$ (setze durch 0 fort). Insbesondere folgt für $p = q = 2$ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:
$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$.

Korollar 1.4.
Folgende Räume sind normiert:
$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $(l_p, \|\cdot\|_p)$, $C(\bar{I}; \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ *mit* $1 \leq p \leq \infty$.

Beweis:
Alle Eigenschaften einer Norm sind klar bis auf die Dreiecksungleichung (und das ist Satz 1.3 (c)) und die Tatsache, dass für eine stetige Funktion gilt $\int |f|^p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (ist Analysis I).

$\square$

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Durch $d(x, y) := |x - y|$ $(= \|x - y\|_2)$ wird eine Metrik definiert. $(K, d|_K)$ ist wieder metrischer Raum. Nach Lemma I-11.4 ist $(\mathbb{R}^n, d)$ vollständig. K heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine endliche Teilüberdeckung $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}$ besitzt.

Satz 1.5 (von Bolzano-Weierstraß)**.**
Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt. Dann existiert eine konvergente Teilfolge* $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$.

Im Beweis verwenden wir die Bezeichnung $P_j x := x_j$ für Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, d.h. $P_j x \in \mathbb{R}$ ist die j-te Komponente des Vektors x.

Beweis:
Sei $\|x_k\|_2 \leq M$. Dann gilt $|P_j x_k| \leq M$ für $j = 1, \ldots, n, k \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 4.18 (Analysis I) existiert eine Teilfolge $(x_l^{(1)})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $(P_1 x_l^{(1)})_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergent. Davon existiert wieder eine Teilfolge $(x_l^{(2)})_{l\in\mathbb{N}}$, für welche $(P_2 x_l^{(2)})_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert, usw. Insgesamt erhalten wir eine Teilfolge $(x_l^{(n)})_{l\in\mathbb{N}}$, für die alle Komponenten $(P_j x_l^{(j)})_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, n)$ konvergent sind, d.h. $(x_l^{(n)})_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ konvergiert.

$\square$

Satz 1.6.
Für $K \subset \mathbb{R}^n$ *sind äquivalent:*

(i) K ist kompakt (Heine-Borel-Eigenschaft);

(ii) K ist abgeschlossen und beschränkt;

(iii) Jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ *besitzt eine konvergente Teilfolge* $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *mit* $x := \lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} \in K$.

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Satz 11.13 (Analysis I).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Satz von Bolzano-Weierstraß.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen folgende Schritte:

(a) K ist abgeschlossen: zu $x \in \overline{K}$ existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ mit $x_k \to x$. Nach (iii) existiert eine Teilfolge $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\widetilde{x} := \lim\limits_{j} x_{k_j} \in K$. Da der Grenzwert eindeutig ist, folgt $x = \widetilde{x} \in K$, d.h. $K = \overline{K}$.

(b) K ist totalbeschränkt, d.h.
$\forall \varepsilon > 0\ \exists K_0 \subset K$, K_0 endlich: $K \subset \bigcup\limits_{a\in K_0} B(a,\varepsilon)$.
Sonst existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle endlichen $K_0 \subset K$ ein $x \in K$ existiert mit $x \notin \bigcup\limits_{a\in K_0} B(a,\varepsilon)$. Wähle $x_1 \in K$ und (induktiv) $x_k \in K \setminus \bigcup\limits_{l=1}^{k-1} B(x_l,\varepsilon)$. Dann ist $|x_k - x_l| \geq \varepsilon$ $(k \geq l)$, Widerspruch zu (*iii*).

(c) K ist kompakt (Prinzip der Intervallschachtelung).
Angenommen, $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung.
Zu $\varepsilon_1 := \frac{1}{2}$ existiert nach (b) $K_1 \subset K$, K_1 endlich, mit $K \subset \bigcup\limits_{a\in K_1} B(a,\varepsilon_1)$. Dann existiert ein $a_1 \in K_1$, so dass $K \cap B(a,\varepsilon_1)$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Zu $\varepsilon_2 := \frac{1}{4}$ existiert $K_2 \subset K$ endlich mit $K \subset \bigcup\limits_{a\in K_2} B(a,\varepsilon_2)$.
Es existiert ein $a_2 \in K_2$, so dass $K \cap B(a_1,\varepsilon_1) \cap B(a_2,\varepsilon_2)$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt; usw. Wir erhalten mit $\varepsilon_m := 2^{-m}$ eine Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass $A_M := K \cap \bigcap\limits_{m=1}^{M} B(a_m,\varepsilon_m)$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Insbesondere ist $A_M \neq \emptyset$. Wähle $v \in A_M$. Wegen $|a_M - a_{M-1}| \leq |a_M - v| + |v - a_{M-1}| \leq 2^{-M} + 2^{-M+1} < 2^{-M+2}$ ist $(a_M)_{M\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $z := \lim\limits_{M\to\infty} a_M \in \mathbb{R}^n$ existiert. Nach (a) ist $z \in K$. Also existiert ein i_0 mit $z \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(z,2\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Wähle $M \in \mathbb{N}$ mit $|a_M - z| < \varepsilon$ und

$2^{-M} < \varepsilon$. Für $x \in A_M$ gilt $|z-x| \leq \underbrace{|z-a_M|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_M - x|}_{<2^{-M}<\varepsilon} < 2\varepsilon$

d.h. $A_M \subset B(z, 2\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Das ist eine endliche Überdeckung von A_M, Widerspruch.

□

Korollar 1.7 (Intervallschachtelung)**.**
Seien $A_k \neq \emptyset$, A_k abgeschlossen, $A_k \subset \mathbb{R}^n$, mit $A_k \supset A_{k+1} (k \in \mathbb{N})$. Sei ein A_k beschränkt. Dann ist $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$.

Beweis:
Ohne Einschränkung sei A_1 beschränkt. Angenommen, $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$.
Dann ist $A_1 \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}^n \setminus A_k) = \mathbb{R}^n$ eine offene Überdeckung.
Da A_1 kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A_1 \subset \bigcup\limits_{k=1}^{K} (\mathbb{R}^n \setminus A_k) = \mathbb{R}^n \setminus A_k$, d.h. $\underbrace{A_1 \cap A_K}_{=A_K} = \emptyset$.

□

b. Stetige Funktionen in metrischen Räumen

Wiederholung:
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig in $x_0 \in X$, falls $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X, d_X(x, x_0) < \delta : d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

f heißt gleichmäßig stetig, falls
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta$: $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

f heißt Lipschitz-stetig in X, falls ein $c \geq 0$ existiert mit $\forall x, x' \in X : d_Y(f(x), f(x')) \leq c \cdot d_X(x, x')$.

Es gilt: f ist stetig in $x_0 \in X \Leftrightarrow \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$: $f(x_k) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$ (folgenstetig).

X heißt zusammenhängend, falls $\nexists A, B \subset X$: $X = A \cup B$, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, A, B offen.

Satz 1.8.
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume.

(a) Sei $f \in C(X; Y)$ und $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K)$ kompakt, und $f|_K$ gleichmäßig stetig.

(b) Sei X zusammenhängend, $f \in C(X; Y)$. Dann ist $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis:

(a) Satz 11.13 (Analysis I)

(b) Satz 11.16 (Analysis I)

□

Korollar 1.9.
Sei $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

(a) $f(K)$ ist abgeschlossen und beschränkt.

(b) *Die Extrema werden angenommen, d.h.* $\sup\limits_{x\in K} f(x) = \max\limits_{x\in K} f(x)$, $\inf\limits_{x\in K} = \min\limits_{x\in K} f(x)$.

Beweis:
Satz 1.6 und Satz 1.8.

□

Definition 1.10.

(a) Ein **Weg** in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t)$.
Die Punkte $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ heißen durch den Weg γ **verbunden**.

(b) $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **wegzusammenhängend**, falls je zwei Punkte $m_1, m_2 \in M$ durch einen Weg *in* M verbunden werden können.
D.h. $\exists a, b \in \mathbb{R}, \gamma \in C([a,b]; M) : \gamma(a) = m_1, \gamma(b) = m_2$.

Satz 1.11.
Wegzusammenhängende Mengen sind zusammenhängend.

(ohne Beweis)

Bemerkung:
Es gibt Mengen in $\mathbb{R}^n$, die zusammenhängend sind, aber nicht wegzusammenhängend. (Bsp. siehe Übungsblatt)

Bemerkung 1.12.
Sei $f \in C(X; \mathbb{R})$, X zusammenhängend. Dann ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (Satz 1.8 (b) + Übung).

Lemma 1.13.
Sei $\|\cdot\|$ *eine Norm auf* $\mathbb{R}^m$. *Dann ist* $\|\cdot\|(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ *stetig.*

Beweis: Sei e_j der j-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^m$. Für $x, y \in \mathbb{R}^m$ ist $\|x-y\| = \left\|\sum\limits_{i=1}^n (x_i - y_i)e_i\right\| \leq$
$\sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i| \cdot \|e_i\| \leq \underbrace{\max\limits_{1,\dots,n} |x_i - y_i|}_{=\|x-y\|_\infty} \cdot \underbrace{\sum\limits_{i=1}^n \|e_i\|}_{=:c}$
$\|x - y\| \leq c \cdot \|x - y\|_\infty$.

Wegen $\underbrace{\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|}_{\text{erweiterte Dreiecksgleichung}}$ ist $\|\cdot\|$ Lipschitz-stetig.
D.h. $\|\cdot\| : (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

□

Satz 1.14.
Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, f stetig und injektiv. Sei D kompakt. Dann ist $f^{-1} : R(f) \to \mathbb{R}^n$ wieder stetig.

Beweis:
wie in Lemma Analysis I.5.14.

□

Satz 1.15.
Alle Normen in $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h. falls $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}$ zwei Normen in $\mathbb{R}^n$ sind, so existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$, mit

$$c_1\|x\|_{(1)} \leq \|x\|_{(2)} \leq c_2\|x\|_{(1)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Beweis:
Es genügt zu zeigen, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ zur Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent ist.
Da $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist (Lemma 1.13), ist $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ abgeschlossen (als Urbild von $\{1\} \subset \mathbb{R}$ bezüglich der Funktion $\|\cdot\|_\infty$) und beschränkt, also kompakt.
Nach Lemma 1.13 und Korollar 1.9 (b) existiert $m := \min_{x \in B_1} \|x\|$ und $M := \max_{x \in B_1} \|x\|$. Da $\|\cdot\|$ eine Norm ist, gilt $m > 0$ (da $0 \notin B_1$). Damit gilt für alle $x \in B_1$: $0 < m \leq \|x\| \leq M$.
D.h. für *alle* $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$m \leq \left\| \underbrace{\frac{x}{\|x\|_\infty}}_{\in B_1} \right\| \leq M, \text{ d.h. } m \cdot \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \cdot \|x\|_\infty.$$

□

Korollar 1.16.
Seien $\|\cdot\|_{(1)}, \|\cdot\|_{(2)}$ Normen in $\mathbb{R}$. Dann gilt für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
f ist stetig bezüglich $\|\cdot\|_{(1)} \Leftrightarrow f$ ist stetig bezüglich $\|\cdot\|_{(2)}$.

Bemerkung 1.17.

(a) Sei $P_k : x \mapsto x_k$, $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, die Projektion auf die k-te Koordinate.
Dann gilt:
$f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow \forall k = 1, \dots, m\colon P_k f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

(b) Die folgenden Abbildungen sind stetig:

$$\begin{aligned} \pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x \pm y \\ \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x \cdot y \\ : : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \tfrac{x}{y}. \end{aligned}$$

(denn sie sind folgenstetig nach den Regeln über den Limes)

$$\begin{aligned} \max \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \max\{x, y\} \\ \min \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \min\{x, y\} \end{aligned}$$

(denn etwa für $x < y$ und $x_k \to x$, $y_k \to y$ $(k \to \infty)$ ist $x_k < y_k$ für genügend großes k, und damit $y = \max\{x, y\} = \lim_k y_k = \lim_k \max\{x_k, y_k\}$)

c. Lineare Abbildungen in normierten Räumen

Definition 1.18.
Seien X, Y normierte K-Vektorräume. Eine Abbildung $A : X \to Y$ heißt **linear**, falls $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K\ \forall x_1, x_2 \in X$: $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$.
Falls $Y = K$, heißt A auch **lineares Funktional**.
Wir schreiben meistens Ax statt $A(x)$.
Definiere $L(X, Y) := \{A : X \to Y, A$ linear, **stetig**$\}$ (**stetige lineare Operatoren**).
A heißt beschränkt, falls $\exists c > 0\ \forall x \in X$: $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$.

Satz 1.19.
Seien X, Y normierte Räume, $A : X \to Y$ linear.

(a) A ist stetig in $X \Leftrightarrow A$ ist stetig in einem Punkt x_0.

(b) A ist stetig in $X \Leftrightarrow A$ ist beschränkt.

Beweis:

(a) $\Leftarrow$:
Sei A stetig in $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ mit $\forall x \in X\ \|x - x_0\|_X < \delta$: $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.
Sei $x_1 \in X$. Für $x \in B(x_1, \delta)$ ist $\|Ax - Ax_1\|_Y = \|A(\underbrace{x + x_0 - x_1}_{\in B(x_0,\delta)}) - Ax_0\|_Y < \varepsilon$.
D.h.: A stetig in x_1.

(b) (i) Sei A beschränkt. Dann folgt aus $\|Ax\|_Y < c\|x\|_X$ die Stetigkeit an der Stelle 0 (sofort aus Folgenstetigkeit).

(ii) Sei A stetig in 0. Wähle $\delta > 0$ mit $\forall x \in B(0, \delta) : \|Ax\|_Y < 1$.
Für $x \neq 0$ ist $\|Ax\|_Y = \left\|\frac{2\|x\|}{\delta} A\left(\frac{\delta}{2\|x\|} \cdot x\right)\right\|_Y < \frac{2\|x\|}{\delta} \cdot 1$, da $\frac{\delta}{2\|x\|} \cdot x \in B(0, \delta)$.
Also ($x \neq 0$): $\|Ax\|_Y \leq c \cdot \|x\|_X$ mit $c : \frac{2}{\delta}$.

$\square$

Definition 1.20.
Seien X, Y normierte Räume. Die Abbildung $\|\cdot\| : L(X, Y) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$ heißt **Operatornorm** auf $L(X, Y)$.

Bemerkung 1.21.

(a) Für $A \in L(X,Y)$ gilt $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y$.

(b) $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ ist ein normierter Raum. (Übung)

Beispiel 1.22.
Sei $X = (C^1([0,1];\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (C([0,1];\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ und $A : X \to Y$, $f \mapsto f'$. Dann ist A linear, aber nicht stetig.
Für $f_n := x^n$ gilt $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\|Af_n\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = n$, und damit ist A unbeschränkt.

Satz 1.23.
Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann ist A stetig.

Beweis:
Sei e_i der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt $Ax = \sum\limits_{i=1}^n x_i Ae_i$, d.h. $\|Ax\|_\infty = \|\sum\limits_{i=1}^n x_i Ae_i\|_\infty \leq \sum\limits_{i=1}^n |x_i| \cdot \|Ae_i\|_\infty \leq \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i| \cdot \sum\limits_{i=1}^n \|Ae_i\|_\infty =: c \cdot \|x\|_\infty$.
Und damit ist $A : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ beschränkt.
Somit ist A stetig bezüglich $\|\cdot\|_\infty$-Norm, also (nach Korollar 1.16) auch stetig bezüglich jeder Norm.

□

Korollar 1.24.
Die Koordinatenfunktionen $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x_i$, sind stetig.

Bemerkung 1.25.
Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann gilt $A(x) = M_A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit einer Matrix $M_A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) =: \mathbb{R}^{m\times n}$. Die j-te Spalte von M_A ist die Darstellung von $Ae_j^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ bezüglich der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^m$.
Genauer: Sei $\{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$, $\{e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)}\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$.
Dann: $Ae_j^n = \sum\limits_{k=1}^m a_{kj} e_k^{(m)}$. Setze $M_A := (a_{kj})_{k=1,\dots,m; j=1,\dots,n}$.
Im Folgenden wird stets die kanonische Basis gewählt. Ab sofort wird nicht zwischen A und M_A unterschieden.

2. Differenzieren im $\mathbb{R}^n$

Im Folgenden seien $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$. Die Normen in $\mathbb{R}^n$ sind alle äquivalent, wir wählen die euklidische Norm $|x| := \|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ oder die Maximumsnorm $|x|_\infty := \|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Die Ableitung von f kann nicht wie im eindimensionalen Fall definiert werden, weil der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für $h \in \mathbb{R}^n$ keinen Sinn macht.
Aber nach Analysis I gilt für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f differenzierbar:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + r(x,h) \text{ mit } \lim_{h\to 0} \frac{r(x,h)}{|h|} = 0.$$

Dieser Ansatz geht auch in $\mathbb{R}^n$.
Wir verwenden folgende Schreibweise (**Landau-Symbol** „klein o“): $\varphi(x) = o(|x - x_0|) :\Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{|x-x_0|} \to 0$ $(x \to x_0)$.

Definition 2.1.

(a) Sei $x \in U$, $V_x := \{h \in \mathbb{R}^n : x + h \in U\}$ $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar** an der Stelle x, falls eine lineare Abbildung $A = A(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h \mapsto A(x)h$ und eine in 0 stetige Abbildung $r(x,\cdot) : V_x \to \mathbb{R}^m$ mit $r(x, 0) = 0$ gibt, so dass

$$f(x+h) = f(x) + A(x)h + r(x,h) \cdot |h| \qquad (h \in V_x)$$

Kurz: $f(x+h) = f(x) + A(x)h + o(|h|)$ $\qquad (V_x \ni h \to 0)$

(b) f heißt differenzierbar in U, falls f an jeder Stelle $x \in U$ differenzierbar ist.

(c) Falls f in $x \in U$ differenzierbar ist, so heißt

$$Df(x) := f'(x) := A(x)$$

die **Ableitung** (**totales Differential**) von f an der Stelle x.

Bemerkung 2.2.

(a) Die Abbildung $A(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h \mapsto A(x)h$ ist **eindeutig**, d.h. $f'(x)$ ist **wohldefiniert**. Denn für zwei solche Abbildungen $A_1(x), A_2(x)$ ist $(A_1(x) - A_2(x))h + [r_1(x,h) - r_2(x,h)] \cdot |h| = 0$.
Damit ist für $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
$|A_1(x) - A_2(x)|\frac{|y|}{|y|} = \frac{|(A_1(x)-A_2(x))ty|}{|ty|} = |r_1(x,ty) - r_2(x,ty)| \to 0, t \to 0$
und somit $A_1(x) = A_2(x)$ als Abbildung in $\mathbb{R}^n$ (x ist fest).

(b) Da $A(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear ist, ist $A(x)$ stetig und kann als Matrix dargestellt werden.

(c) Es gilt: f ist in x differenzierbar $\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, m : P_i f$ ist in x differenzierbar.
Falls f in x differenzierbar ist, so ist $f'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$
(Denn aus $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(|h|)$ folgt für jede Komponente: $f_i(x+h) = f_i(x) + f_i'(x)h + o_i(|h|)$).
Die Rückrichtung folgt durch Zusammensetzen der $f_i'(x)$ zu einer Matrix $\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$

Beispiel 2.3.

(a) $f : U \ni x \mapsto c \in \mathbb{R}^m$
Es gilt $f'(x) = 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denn: $f(x+h) = f(x) + 0 \cdot h + 0$.

(b) Sei $f(x) := Mx$ mit $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear ($M \in \mathbb{R}^{m \times n}$).
Dann ist $f'(x) = M$, denn: $f(x+h) = M(x+h) = Mx + Mh = f(x) + Mh$.
z.B.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1 + x_2 \Rightarrow f'(x) = (1\,1)$
Denn: $f(x) = x_1 + x_2 = (1\,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \cdot x_2$. Dann ist $f(x+h) = (x_1 + h_1)(x_2 + h_2) = x_1x_2 + h_1x_2 + h_2x_1 + h_1h_2 = f(x) + (x_2\,x_1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \underbrace{h_1h_2}_{=o(|h|)}$
Also $f'(x) = (x_2\,x_1)$.

(d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^2 = \langle x, x \rangle = x^t \cdot x$.
Es ist $f(x+h) = \langle x+h, x+h \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle = f(x) + 2\langle x, h \rangle + |h|^2$.
Also ist $f'(x) = 2x^t$ (Zeilenvektor!).

Satz 2.4.
Ist f differenzierbar in x, so ist f stetig in x.

Beweis:
$f(x+h) - f(x) = \underbrace{f'(x)}_{\text{konstant}} h + r(x,h) \cdot |h| \to 0, h \to 0$

□

Definition 2.5.

(a) Sei $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$. Falls
$(D_v f)(x) := \lim\limits_{t \to 0, t \in \mathbb{R}} \frac{f(x+t\cdot v)-f(x)}{t} \in \mathbb{R}^m$
existiert, heißt f an der Stelle x **in Richtung** v **differenzierbar**, und $D_v f(x) \in \mathbb{R}^m$ heißt die **Richtungsableitung**. Speziell für $v := e_i$ heißt $D_{e_i} f(x)$ die i**-te partielle Ableitung** oder die **partielle Ableitung nach** x_i.

(b) Sei $m = 1$, d.h. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann schreibt man $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := (D_{e_i} f)(x) \in \mathbb{R}$.
Andere Schreibweisen: $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$, $\partial_{x_i} f(x)$, $\partial_i f(x)$.
f heißt **partiell differenzierbar**, falls f nach allen x_i partiell differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $grad f(x) := \nabla f(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
der **Gradient von** f an der Stelle x.

Satz 2.6.
Sei f in $x \in U$ differenzierbar. Dann ist f in jeder Richtung $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, differenzierbar, und $D_v f(x) = f'(x)v \in \mathbb{R}^m$.

Beweis:
$\frac{1}{t}(f(x+tv) - f(x)) = \frac{1}{t}(f'(x)(tv) + o(|tv|)) = f'(x)v + \frac{o(|tv|)}{|tv|} \cdot \frac{|tv|}{t} \to f'(x)v, t \to 0.$

□

Definition und Satz 2.7.
Sei $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ differenzierbar. Dann ist f in jeder Richtung e_i differenzierbar, und es gilt $D_{e_i} f(x) = f'(x) e_i$ (i-te Spalte von $f'(x)$).

Für $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ gilt: $f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} =: Df(x) = J_f(x)$.

Diese Matrix heißt ***Jacobi-Matrix*** *von f an der Stelle x.*
Insbesondere gilt für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $f'(x) = (\partial_1 f(x) \dots \partial_n f(x))$ also
$f'(x) = (\nabla f(x))^t, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Beweis:
Satz 2.6 und Bemerkung 2.2 (c).

□

Bemerkung 2.8.
Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt weder die Differenzierbarkeit noch die Stetigkeit.

Beispiel 2.9.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$.
Sei $x \in U$ fest, ist $f'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, d.h. $f' : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Man kann f' auch als Abbildung $f' : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x, h) \mapsto f'(x) \cdot h$ sehen. Da $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{n \times m} \cong \mathbb{R}^{m \cdot n}$ wieder ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, sind alle Normen äquivalent. Die kanonische Norm ist die Operatornorm. Damit ist klar, was die Stetigkeit von f' bedeutet. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig differenzierbar, falls f differenzierbar ist und $f' : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ stetig ist. Wie üblich: $C^1(U; \mathbb{R}^m) := \{f : U \to \mathbb{R}^m | f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$.

Satz 2.10 (Kettenregel)**.**
Seien $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \supset V \to \mathbb{R}^k$ beide differenzierbar, mit $f(U) \subset V$, U, V offen. Dann ist $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar, und $\underbrace{(g \circ f)'(x)}_{\mathbb{R}^{k \times n}} = \underbrace{g'(f(x))}_{\mathbb{R}^{k \times m}} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\mathbb{R}^{m \times n}}$

Beweis:
Sei $y = f(x) \in \mathbb{R}^m, \varepsilon > 0$. Dann ist $g(y + h_2) = g(y) + g'(y)h_2 + r_2(y, h_2)$ mit $r_2(y, h_2) = o(|h_2|)$.
Insbesondere ist $|r_2(y, h_2)| \leq \varepsilon |h_2|$, falls $|h_2|$ klein.
Für f gilt $f(x + h_1) = f(x) + f'(x)h_1 + r_1(x, h_1)$ mit $r_1(x, h_1) = o(|h_1|)$.
Damit $(g \circ f)(x + h_1) = g(f(x)) + g'(f(x)) \underbrace{(f(x + h_1) - f(x))}_{=:h_2} + r_2(y, h_2) = (g \circ f)(x) + g'(f(x))f'(x)h_1 + g'(f(x))r_1(x, h_1) + r_2(y, h_2)$.
Es ist $|g'(f(x))r_1(x, h_1) + r_2(y, h_2)| \leq \|g'(f(x))\| \cdot |r_1(x, h_1)| + |r_2(y, h_2)| \leq \|g'(f(x))\| |r_1(x, h_1)| + \varepsilon |h_2| \underbrace{\leq}_{Def. h_2} \|g'(f(x))\| \cdot \underbrace{|r_1(x, h_1)|}_{=o(|h_1|)} + \varepsilon [\|f'(x)\| \cdot |h_1| + \underbrace{|r_1(x, h_1)|}_{\leq C \cdot |h_1|}] = o(|h_1|)$ (ε klein, falls $|h_1|$

klein).

$\square$

Beispiel 2.11.

Seien $I \subset \mathbb{R}$, $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $a \in I$. Sei $f(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ $(t \in I)$, $g : \mathbb{R}^3 \supset U \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $b = f(a)$.

Für $h := g \circ f : I \to \mathbb{R}$ gilt dann $h'(a) = g'(b)f'(a) = (\partial_1 g(b)\, \partial_2 g(b)\, \partial_3 g(b)) \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \\ z'(a) \end{pmatrix} =$ $\partial_1 g(b)x'(a) + \partial_2 g(b)y'(a) + \partial_3 g(b)z'(a)$.

In älterer Literatur wird meist nicht zwischen g und h unterschieden:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}}$$

Bemerkung 2.12.

(a) Häufig wird ∇f als Zeilenvektor definiert. Wichtig ist: die Ableitung $f'(x)$ ist für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ immer ein Zeilenvektor!

(b) Es gelten die üblichen Regeln über die Ableitung von Summen, Produkten, Quotienten, usw.
Etwa für $f, g : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R} : (f \cdot g)'(x) = \underbrace{g(x)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{f'(x)}_{\in\mathbb{R}^{1\times n}} + \underbrace{f(x)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{g'(x)}_{\in\mathbb{R}^{1\times n}}$ (Zeilenvektor).

Bemerkung 2.13 (Interpretation des Gradienten)**.**
Sei $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$. Nach Satz 2.6 ist $|D_v f(x)| = |f'(x)v| = |\langle \nabla f(x), v\rangle| \leq |\nabla f(x)| \cdot |v| = |\nabla f(x)|$.
Damit ist $|D_v f(x)|$ maximal, falls $v = \pm\frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$ (falls $\nabla f(x) \neq 0$). Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs von f.
Vergleiche: $f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + o(|h|)$.
Der negative Gradient zeigt in Richtung der Falllinie.

Eine Höhenlinie (Niveaulinie) ist gegeben durch $N_f(c) := \{x \in U : f(x) = c\}$ für $c \in \mathbb{R}$. Eine Parametrisierung der Höhenlinie ist eine Abbildung $x : \mathbb{R} \to N_f(c)$ (x differenzierbar). D.h. es gilt $\forall\, t \in \mathbb{R} : f(x(t)) = c$.
Damit folgt $0 = \frac{d}{dt} f(x(t)) = f'(x(t)) \cdot x'(t) = \langle \nabla f(x(t)), x'(t)\rangle$.

D.h. die Vektoren $\nabla f(x(t))$ und $x'(t) \in \mathbb{R}^n$ stehen aufeinander senkrecht.
Höhenlinien und der Gradient (bzw. Falllinien) stehen überall aufeinander senkrecht!

Eine Parametrisierung der Falllinie ist eine Abbildung $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $\beta'(t) = -\nabla f(\beta(t))$.

Beispiel 2.14.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Dann ist f in $\mathbb{R}^2$ differenzierbar und $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = 2x$. Die Falllinien sind Geraden durch den Ursprung, die Höhenlinien sind Kreise um den Ursprung.

Definition 2.15.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann heißt
$\operatorname{div} f(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i f_i(x)$, $\operatorname{div} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Divergenz von f.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbar. Dann heißt $\operatorname{rot} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto \operatorname{rot} f(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(x) - \partial_3 f_2(x) \\ \partial_3 f_1(x) - \partial_1 f_3(x) \\ \partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x) \end{pmatrix}$ die Rotation von f.

(c) Die Abbildung $\Delta : C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}), f \mapsto \Delta f := \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i^2 f$, $\Delta f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}$
heißt Laplace-Operator (beachte „$\Delta = \operatorname{div}\ \operatorname{grad}$")
Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiere $\Delta f(x) := \begin{pmatrix} \Delta f_1(x) \\ \vdots \\ \Delta f_m(x) \end{pmatrix}$.

Bemerkung 2.16.
Sei f differenzierbar in $a \in U$. Dann gilt: $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(a,h) \cdot |h| = f(a) + f'(a)h + R(a,h) \cdot h = f(a) + F(a,h)h$ mit $\lim\limits_{h\to 0} R(a,h) = 0$, $\lim\limits_{h\to 0} F(a,h) = f'(a)$.
Denn: sei $m = 1$, d.h. $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$. Dann ist $|h|^2 = h^t \cdot h$, d.h. $h \neq 0$ ist
$r(a,h) \cdot |h| = \left(\frac{r(a,h)}{|h|} \cdot h^t\right) \cdot h$. Setze $R(a,h) := \frac{r(a,h)}{|h|} \cdot h^t$ bzw. $F(a,h) := f'(a) + R(a,h)$.

Für $f : U \to \mathbb{R}^m$, d.h. $r(a,h) = \begin{pmatrix} r_1(a,h) \\ \vdots \\ r_m(a,h) \end{pmatrix}$, setze $R(a,h) := \begin{pmatrix} \frac{r_1(a,h)}{|h|} \cdot h^t \\ \vdots \\ \frac{r_m(a,h)}{|h|} \cdot h^t \end{pmatrix}$

Satz 2.17 (Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung).
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ injektiv und in a differenzierbar mit $\det(f'(a)) \neq 0$. *Sei $b := f(a)$ ein innerer Punkt von $f(U)$, und sei $g := f(U) \to \mathbb{R}^n$ stetig in b. Dann ist g in b differenzierbar, und $g'(b) = (f'(a))^{-1}$.*

Beweis:
Nach Bemerkung 2.16 ist $f(a+x) = f(a) + F(a,x)x$ mit $\lim\limits_{x\to 0} F(a,x) = f'(a)$. Da $\det(f'(a)) \neq 0$, gilt auch $\det(F(a,x)) \neq 0$ für $x \in U(0)$ mit einer Umgebung $U(0)$ von 0. Damit existiert in $U(0)$ die Abbildung $(F(a,\cdot))^{-1}$. Diese ist stetig nach Satz 1.13.
Zu $x \in \mathbb{R}^n, |x|$ klein, setze $y := f(a+x) - f(a) = f(a+x) - b$, d.h. $a + x = g(b+y)$.
Für $G(y) := F(a,x)^{-1}$ ist $G(y)y = G(y)(f(a+x) - f(a)) = G(y)F(a,x)x = x$ und damit $g(b+y) = a + x = a + G(y)y = g(b) + G(y)y$.
Es gilt $\lim\limits_{y\to 0} G(y) = \lim\limits_{y\to 0} F(a,x)^{-1} = \lim\limits_{y\to 0} F(a, \underbrace{g(b+y) - a}_{\to 0, y \to 0})^{-1} = F(a,0)^{-1} = (f'(a))^{-1}$.
Damit ist g an der Stelle b differenzierbar, und $g'(b) = (f(a))^{-1}$.

□

Beispiel 2.18 (Polarkoordinaten).
Definiere $f : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto f(r,\varphi) := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$
Dann ist f injektiv, und $g := f^{-1}$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = g(x,y), r = \sqrt{x^2+y^2}$,
$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{, falls } x, y > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{, falls } x = 0, y > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{, falls } x < 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{, falls } x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{, falls } x > 0, x < 0 \end{cases}$$
(d.h. $\varphi = \arg(x + iy)$). Es gilt $f'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$, d.h. $\det(f'(r,\varphi)) = r \neq 0$. Damit ist g differenzierbar, und
$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} & \frac{1}{x}\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{r} & \frac{\cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix} = f'(r,\varphi)^{-1}.$$

Definition 2.19.
Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to V$ heißt **Diffeomorphismus**, falls f bijektiv ist und $f \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$, $f^{-1} \in C^1(V;\mathbb{R}^n)$.

3. Mittelwertsatz und höhere Ableitungen

Satz 3.1 (Mittelwertsatz)**.**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a, b \in U$. Sei $s_{ab} := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [0,1] : x = a + t(b-a)\} \subset U$. (d.h. die Strecke von a nach b liege in U).
Dann existiert ein $c \in s_{ab}$ mit $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$.
(Beachte: $f'(c) \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $(b-a) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$)

Beweis:
Definiere den Weg $\gamma(t) := a + t(b-a)$ und $F : [0,1] \to \mathbb{R}, F(t) := f(\gamma(t))$. Nach dem skalaren Mittelwertsatz gilt: $\exists \theta \in (0,1) : F(1) = F(0) + F'(\theta)$. Mit $F(1) = f(b)$, $F(0) = f(a)$ und $F'(\theta) = f'(\underbrace{\gamma(\theta)}_{=:c}) \cdot \underbrace{\gamma'(\theta)}_{=b-a} = f'(c)(b-a)$ folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 3.2.

(a) Wie man im Beweis sieht, gilt folgende Verallgemeinerung:
Sei $\gamma : [0,1] \to U, \gamma$ differenzierbar, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. (d.h. γ ist ein differenzierbarer Weg von a nach b). Dann gilt $f(b) = f(a) + f'(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)$ mit $\theta \in (0,1)$.

(b) Andere Formulierung des Mittelwertsatzes: für $x \in U$, $|h|$ klein, gilt

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)h \text{ für ein } \theta \in (0,1)}$$

(c) Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt der Mittelwertsatz in jeder Komponente, aber der Zwischenwert $\theta = \theta_j$ ist in jeder Komponente ein anderer.

Korollar 3.3.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt $\nabla f = 0 \Leftrightarrow f = const.$.

Beweis:

„$\Leftarrow$“ : klar.

„⇒“ : Da U offen und wegzusammenhängend ist, existieren zu $a, b \in U$ Zwischenpunkte $a = a_0, a_1, \ldots, a_k = b$ mit $s_{a_j a_{j+1}} \subset U, j = 0, \ldots, k-1$. Wegen $f'(x) = (\nabla f(x))^t = 0$ gilt nach dem Mittelwertsatz:
$f(a) = f(a_0) = f(a_1) = \ldots = f(a_k) = f(b)$.

□

Satz 3.4.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^m$. Falls die partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ $\left(\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ in einer Umgebung $U(a)$ von a existieren und in a stetig sind, so ist f differenzierbar an der Stelle a.

Beweis:

(i) $m = 1$:
Sei $h \in \mathbb{R}^n$, $|h|$ so klein, dass alle Punkte $a_0 := a$, $a_1 := a + h_1 e_1$, $a_2 := a_1 + h_2 e_2$, …, $a_n := a_{n-1} + h_n e_n = a + h$ in U liegen (mit Verbindungsstrecken).
Dann ist $f(a+h) - f(a) = (f(a_n) - f(a_{n-1})) + (f(a_{n-1}) - f(a_{n-2})) + \ldots$ (MWS)
$= \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(c_j) h_j$ mit $c_j \in s_{a_{j-1}a_j}$.
Insbesondere $|c_j - a| \leq |h|$. Damit

$$\left| f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) h_j \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f(c_j) - \partial_j f(a)) h_j \right|$$

$$\leq |h| \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|\partial_j f(c_j) - \partial_j f(a)|}_{\to 0 \text{ für } h \to 0, \text{ da } \partial_j f \text{ stetig in } a} = o(|h|).$$

Damit ist f differenzierbar in a, und $f'(a)h = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(a) h_j = (\partial_1 f(a) \ldots \partial_n f(a)) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

(ii) $m > 1$: Nach (i) ist jede Komponente differenzierbar und damit nach Bemerkung 2.2 (c) f differenzierbar.

□

Bemerkung 3.5.
Falls die partiellen Ableitungen $\partial_j f$ in einer Umgebung $U(a)$ von a stetig sind, zeigt der Beweis, dass f stetig differenzierbar in $U(a)$ ist.

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Dann gibt es zwei Interpretationen der Ableitung f': einmal als Abbildung $f' : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $x \mapsto f'(x)$, und

andererseits als Abbildung $f' : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (x,h) \mapsto f'(x)h$.
Wegen $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m\times n} \cong \mathbb{R}^{m\cdot n}$ können höhere Ableitungen definiert werden.
$f'' : U \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \cong L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m\times n})$.
$f''' : U \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))$ usw.
bzw. $f'' : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (x, h^{(1)}, h^{(2)}) \mapsto f''(x, h^{(1)}, h^{(2)}) = (f''(x)h^{(1)})h^{(2)}$. Dabei ist f'' linear in $h^{(1)}$ und in $h^{(2)}$ (also bilinear). Höhere Ableitungen ergeben multilineare Abbildungen.
Schreibe $\partial_j f = \begin{pmatrix} \partial_j f_1 \\ \vdots \\ \partial_j f_n \end{pmatrix}$, und $\nabla := \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$. Dann ist für $h^{(1)} \in \mathbb{R}^n$:

$$f'(x, h^{(1)}) = f'(x)h^{(1)} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ \vdots \\ h_n^{(1)} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n h_j^{(1)} \partial_j f = \underbrace{((h^{(1)})^t \cdot \nabla)}_{\text{Skalarprodukt}} f.$$

Für die zweite Ableitung haben wir:

$$f''(x, h^{(1)}, h^{(2)}) = \sum_{i=1}^n h_i^{(2)} \partial_i \left(\sum_{j=1}^n h_j^{(1)} \partial_j f \right) = \sum_{i,j=1}^n h_i^{(2)} h_j^{(1)} \partial_i \partial_j f = ((h^{(2)})^t \cdot \nabla)((h^{(1)})^t \cdot \nabla) f.$$

Beachte: $\partial_i \partial_j f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f_m \end{pmatrix}$

Für die p-te Ableitung gilt: für $h^{(1)}, \dots, h^{(p)} \in \mathbb{R}^n$ ist $f^{(p)}(x, h^{(1)}, \dots, h^{(p)}) = ((h^{(p)})^t \cdot \nabla)((h^{(p-1)})^t \cdot \nabla) \cdot \ldots \cdot ((h^{(1)})^t \cdot \nabla) f$.

Satz 3.6 (Satz von Schwarz).
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ zweimal differenzierbar. Dann gilt für alle $x \in U$:

(a) $\forall h^{(1)}, h^{(2)} \in \mathbb{R}^n : f''(x, h^{(1)}, h^{(2)}) = \lim\limits_{s \searrow 0} \frac{f(x+sh^{(1)}+sh^{(2)}) - f(x+sh^{(1)}) - f(x+sh^{(2)}) + f(x)}{s^2}$.

(b) $\forall h^{(1)}, h^{(2)} \in \mathbb{R}^n : f''(x, h^{(1)}, h^{(2)}) = f''(x, h^{(2)}, h^{(1)})$.

(c) $\boxed{\forall i, j \in \{1, \dots, n\}\ \partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)}$

Beweis:

(a) O.E. sei $m = 1$ (komponentenweise)
Setze $F : [0,1] \to \mathbb{R}, F(t) := f(x + th^{(1)} + h^{(2)}) - f(x + th^{(1)})$.

Dann ist F differenzierbar mit $F'(t) = f'(x + th^{(1)} + h^{(2)})h^{(1)} - f'(x + th^{(1)}) \cdot h^{(1)}$. Nach dem Mittelwertsatz ist $A(x, h^{(1)}, h^{(2)}) := F(1) - F(0) = F'(\theta)$ mit $\theta \in (0, 1)$. Also: $A(x, h^{(1)}, h^{(2)}) = f(x + h^{(1)} + h^{(2)}) - f(x + h^{(1)}) - f(x + h^{(2)}) + f(x) = f'(x + \theta h^{(1)} + h^{(2)}, h^{(1)}) - f'(x + \theta h^{(1)}, h^{(1)}) = [f'(x + \theta h^{(1)} + h^{(2)}, h^{(1)}) - f'(x, h^{(1)})] - [f'(x + \theta h^{(1)}, h^{(1)}) - f'(x, h^{(1)})] = f''(x, h^{(1)}, \theta h^{(1)} + h^{(2)}) + R(x, h^{(1)}, \theta h^{(1)} + h^{(2)}) \cdot |\theta h^{(1)} + h^{(2)}| - f''(x, h^{(1)}, \theta h^{(1)}) - R(x, h^{(1)}, \theta h^{(1)}) \cdot |\theta h^{(1)}| \underbrace{=}_{f'' \text{ linear in 3. Var.}} f''(x, h^{(1)}, h^{(2)}) + R(x, h^{(1)}, \theta h^{(1)} + h^{(2)}) \cdot |\theta h^{(1)} + h^{(2)}| - R(x, h^{(1)}, \theta h^{(1)}) \cdot |\theta h^{(1)}|$.

Wegen $R(x, h^{(1)}, h^{(2)}) = f'(x + h^{(2)}, h^{(1)}) - f'(x, h^{(1)}) - f''(x, h^{(1)}, h^{(2)})$ ist R linear in $h^{(1)}$. Ersetze $h^{(1)} \mapsto sh^{(1)}, h^{(2)} \mapsto sh^{(2)}$ und erhalte $\frac{1}{s^2}A(x, sh^{(1)}, sh^{(2)}) = f''(x, h^{(1)}, h^{(2)}) + \underbrace{R(x, h^{(1)}, s\theta h^{(1)} + sh^{(2)})}_{\to 0, s \to 0} \cdot |\theta h^{(1)} + h^{(2)}| - \underbrace{R(x, h^{(1)}, s\theta h^{(1)})}_{\to 0, s \to 0} \cdot |\theta h^{(1)}| \to 0, s \to 0$.
$\Rightarrow \frac{1}{s^2}A(x, sh^{(1)}, sh^{(2)}) \to f''(x, h^{(1)}, h^{(2)})$ für $s \to 0$.

(b) folgt aus (a), da der Ausdruck auf der rechten Seite in (a) symmetrisch in $h^{(1)}, h^{(2)}$ ist.

(c) folgt aus (b) mit $h^{(1)} := e_i, h^{(2)} := e_j$ (Einheitsvektoren).

□

Bemerkung 3.7.

(a) Für die Aussage des Satzes reicht: f einmal differenzierbar in einer Umgebung von x, $f''(x)$ existiert.

(b) Falls die zweiten partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j f$ in einer Umgebung von $U(a)$ von a existieren und in a stetig sind, ist f zweimal differenzierbar in a.
Falls $\partial_i \partial_j f$ in $U(a)$ stetig sind, existiert f'' in $U(a)$ und ist dort stetig (vgl. Bemerkung 3.5).

Satz 3.8. *(von Taylor)*
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ $(p + 1)$-mal differenzierbar. Sei $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$ so klein, dass die Strecke $s_{x,x+h}$ von x nach $x + h$ noch ganz in U liegt. Dann gilt:
$f(x + h) = f(x) + f'(x, h) + \frac{f''(x,h,h)}{2} + \ldots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x, \underbrace{h, \ldots, h}_{p-mal}) + R_p(x, h)$

mit $R_p(x,h) = \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x+\theta h, \underbrace{h,\dots,h}_{(p+1)-mal})$ *für ein* $\theta \in (0,1)$.

Beweis:
Sei $\gamma := [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) := x + th$ und $F(t) := f(\gamma(t)), F : [0,1] \to \mathbb{R}$.
Nach dem skalaren Satz von Taylor ist
$F(1) = F(0) + F'(0) + \ldots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}(\theta)$ für ein $\theta \in (0,1)$.
Es ist $F(1) = f(x+h), F(0) = f(x), F'(t) = f'(\gamma(t), \gamma'(t)) = f'(\gamma(t), h)$,
$F''(t) = f''(\gamma(t), h, \gamma'(t) = f''(\gamma(t), h, h), \ldots, F^{(p)} = f^{(p)}(\gamma(t), \underbrace{h,\dots,h}_{(p-mal)})$.

□

Bemerkung 3.9.

(a) Falls $f \in C^{p+1}(U;\mathbb{R})$, folgt die Restglieddarstellung
$R_p(x,h) = \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p F^{(p+1)}(t)\,dt = \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x+th, \underbrace{h,\dots,h}_{(p+1)-mal})\,dt$.

(b) Falls $f : U \to \mathbb{R}^m$, so gilt die Taylor-Entwicklung komponentenweise. Aber der Zwischenwert $\theta = \theta_j$ ist in jeder Komponente verschieden.

Bemerkung 3.10.
Speziell für $p = 2$ erhalten wir für $f : U \to \mathbb{R}$:
$f'(x,h) = f'(x)h = (\partial_1 f(x), \ldots, \partial_n f(x)) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = (\nabla f(x))^t h = \langle \nabla f(x), h \rangle$.
$f''(x,h,h) = \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j = (h_1, \ldots, h_n) \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x) & \ldots & \partial_1\partial_n f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(x) & \ldots & \partial_n^2 f(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = h^t \cdot$
Hess $f(x) \cdot h$,
wobei die Hesse-Matrix Hess $f(x)$ definiert ist durch

$$\text{Hess } f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x) & \ldots & \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(x) \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.6 ist Hess $f(x)$ symmetrisch. Damit lautet die Taylor-Formel:

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, Hess f(x)h\rangle + R_2(x,h)}$$

Bemerkung 3.11 (Multi-Index-Schreibweise).
Sei $f : U \to \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n$, f hinreichend oft differenzierbar. Im Satz von Taylor tauchen folgende Ausdrücke auf:
$f^{(k)}(x, h, \ldots, h) = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \partial_{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{i_k} f(x) h_{i_1} \cdot \ldots \cdot h_{i_k}$
Hier tauchen manche Ausdrücke mehrfach auf; z.B.
$\partial_1\partial_2 f(x)h_1h_2 = \partial_2\partial_1 f(x)h_2h_1$ (Satz 3.6)
Sei $\alpha \in (N_0)^n$ (α heißt Multi-Index), $h \in \mathbb{R}^n$.
Definiere $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial_n^{\alpha_n}$, $h^\alpha := h_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot h_n^{\alpha_n}$, $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$, $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.
z.B. $\partial^{(2,1)} f(x) h^{(1,3)} = \partial_1^2\partial_2 f(x) \cdot h_1^1 \cdot h_2^3$.
Zu $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ mit $k := |\alpha|$ gibt $\frac{k!}{\alpha! \cdot \ldots \cdot a_n!} = \frac{k!}{\alpha!}$ Summanden, welche die Form
$\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f(x) h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n}$ haben. Damit ist
$\frac{1}{k!} f^{(k)}(x, \underbrace{h, \ldots, h}_{k-mal}) = \sum\limits_{|a|=k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x) h^\alpha$. Damit lautet die Taylor-Formel:

$$\boxed{f(x+h) = \sum_{k=0}^{p} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha}\partial^\alpha f(x)h^\alpha + R_p(x,h) = \sum_{|\alpha|\le p} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)h^\alpha + R_p(x,h)}$$

Definition 3.12.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann heißt $a \in U$ eine **kritische Stelle** von f, falls $\nabla f(a) = 0$ ($\Leftrightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow \forall\, h \in \mathbb{R}^n : f'(a,h) = 0$).

Satz 3.13.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in U$ ein lokales Extremum von f. Dann ist $\nabla f(a) = 0$.

Beweis:
O.E. sei a ein lokales Maximum, d.h. $\forall\, x \in U(a) : f(x) \le f(a)$ für eine Umgebung $U(a)$ von a.
Sei $\varepsilon > 0$ mit $B(a,\varepsilon) \subset U(a) \subset U$.
$|h| < \varepsilon$ setze $F : [-1,1] \to \mathbb{R}, F(t) := f(a+th)$.
Dann ist $F(t) \le F(0) = f(a)$ und damit $0 = F'(0) = f'(a)h$.
Da $h \in B(0,\varepsilon)$ beliebig war, folgt $f'(a) = 0$.

□

Für zweimal differenzierbares $f : U \to \mathbb{R}$ war $f''(a, h^{(1)}, h^{(2)}) = (h^{(1)})^t \text{Hess } f(a) h^{(2)} = \left\langle h^{(1)}, \text{Hess } f(a)h^{(2)}\right\rangle$. Das ist eine quadratische Form.

Allgemein:
Sei Q symmetrisch, d.h. $Q = Q^t$. Dann ist $(h^{(1)}, h^{(2)}) \mapsto \left\langle h^{(1)}, Qh^{(2)} \right\rangle$ die zugehörige quadratische Form.

Die Form (und Q) heißt

- positiv [semi-]definit, falls $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle h, Qh \rangle > 0$ $[\langle h, Qh \rangle \geq 0]$.
- negativ [semi-]definit, falls $\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \langle h, Qh \rangle < 0$ $[\langle h, Qh \rangle \leq 0]$.
- indefinit, falls $h^{(1)}, h^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $\left\langle h^{(1)}, Qh^{(1)} \right\rangle < 0 < \left\langle h^{(2)}, Qh^2 \right\rangle$.

Da Q symmetrisch ist, existiert eine orthogonale Matrix U (d.h. $U^{-1} = U^t$) mit $U^{-1}QU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte von Q.

Beachte:
Es gilt $\det(Q) = \lambda_1 \cdot \lambda_n$, $\operatorname{tr}(Q) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ (wobei $\operatorname{tr}(Q) := \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ii}$ die Spur von $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ ist). Q ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte > 0 sind usw.

Satz 3.14.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U;\mathbb{R})$ und $a \in U$ eine kritische Stelle von f. Falls Hess $f(a)$ positiv [negativ] definit ist, so ist a lokales Minimum [Maximum] von f. Falls Hess $f(a)$ indefinit ist, hat f kein lokales Extremum in a (sogenannter Sattelpunkt).

Beweis:
Nach Taylor gilt für $|h|$ klein: $f(a+h) = f(a) + \left\langle \underbrace{\nabla f(a), h}_{=0} \right\rangle + \frac{1}{2} \langle h, \text{Hess } f(a)h \rangle + r(a, \theta h) \cdot |h|^2$ mit einem $\theta \in (0,1)$ und $r(a,h) \to 0$, $h \to 0$.
Falls Hess $f(a)$ positiv definit ist, folgt $\exists c > 0 : \langle h, \text{Hess } f(a)h \rangle \geq c|h|^2$ $(h \in \mathbb{R}^n)$.
Wähle $\varepsilon > 0$ mit $|r(a,h)| \leq \frac{c}{4}$ $(|h| < \varepsilon)$. Dann folgt für $|h| < \varepsilon$:
$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2}c|h|^2 > \frac{c}{4}|h|^2 = \frac{c}{4}|h|^2 > 0$.
d.h. f hat lokales Minimum in a. Analog lokales Maximum.

Sei nun Hess $f(a)$ indefinit. Seien $h^1, h^2 \in \mathbb{R}^n$ mit $|h^1| = 1 = |h^2|$ und
$c_1 := \left\langle h^1, \text{Hess } f(a)h^1 \right\rangle < 0 < \langle h^2, \text{Hess } h^2 \rangle =: c_2$.
Dann folgt wie vorher für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein:
$\forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : f(a + th^1) > f(a) > f(a + th^2)$

Also hat f kein lokales Extremum an der Stelle a.

□

Beispiel 3.15 (Welcher Quader hat das größte Volumen?)**.**
Volumen des Quaders mit Summe der Kantenlängen = 3:
$f : (0,3)^2 \to \mathbb{R}, f(x) := x_1x_2(3 - x_1 - x_2) = 3x_1x_2 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2.$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \\ 3x_1 - x_1^2 - 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$
Es gilt $\nabla f(x) = 0 \Rightarrow x = a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (beachte $x_1, x_2 > 0$)

Hess $f(x) = \begin{pmatrix} -2x_2 & 3 - 2x_1 - 2x_2 \\ 3 - 2x_1 - 2x_2 & -2x_1 \end{pmatrix}$
Hess $f(a) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
$\langle h, \text{Hess } f(a)h\rangle = -2h_1^2 - 2h_1h_2 - 2h_2^2 = -h_1^2 - h_2^2 - (h_1 + h_2)^2 < 0$ für $h \neq 0$.

Also ist Hess $f(a)$ negativ definit, d.h. an der Stelle a liegt ein lokales Maximum mit $f(a) = 1$ vor. Am Rand $x_1 \in \{0,3\}$ oder $x_2 \in \{0,3\}$ gilt $f(x) \leq 0$, also ist das lokale Maximum auch das globale.

Also hat der Würfel unter allen Quadern (mit fester Summe der Kantenlängen) das größte Volumen.

Beispiel 3.16 (Lineare Ausgleichsrechnung, Methode der kleinsten Quadrate)**.**
Gegeben seien Messwerte in $\mathbb{R}^2$.
Gesucht ist eine quadratische Funktion $g(t) = at^2 + bt + c$, welche die Messung am besten darstellt.

Man minimiert die Summe der Quadrate der Abstände der Messpunkte zur Kurve. Messpunkte: $(t_i, b_i), i = 1, \dots, m$.

Theoretische Funktionswerte: $f_i = at_i^2 + bt_i + c = \begin{pmatrix} t_i^2 & t_i & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{=:x\in\mathbb{R}^n}$

Zu minimieren: $\sum\limits_{i=1}^{m} |b_i - f_i|^2 = \|b - Ax\|_2^2$ mit $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $A = \begin{pmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_m^2 & t_m & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 3}$

Allgemein:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $rk(A) = n$ (und damit $n \leq m$), $b \in \mathbb{R}^m$.
Zu minimieren sei $f(x) := |Ax - b|^2 = (Ax - b)^t(Ax - b) = x^tA^tAx - x^tA^tb - b^tAx + b^tb$.

Um ∇f zu berechnen, beachte folgende Ableitungen:
$f_1(x) := c^tx, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f_1'(x) = c^t$
$f_2(x) := x^td, d \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f_2'(x) = d^t$
$f_3(x) := x^tBx, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow f_3'(x) = x^tB + (Bx)^t = x^tB + x^tB^t$ (Produktregel)

Damit erhalten wir $f'(x) = 2x^t \underbrace{A^tA}_{\textit{symmetrisch}} - 2(A^tb)^t$, und $f''(x) = 2A^tA$.

Es gilt $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{A^tAx = A^tb}$

Das sind die sogenannten Normalengleichungen. Wegen rk $(A) = n$ ist $A^tA \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, und es gilt $x = (A^tA)^{-1}A^tb =: A^+b$ mit der Pseudo-Inversen $A^+ := (A^tA)^{-1}A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Wegen $\langle h, \text{Hess } f(x)h \rangle = 2\langle h, A^tAh \rangle = 2\langle Ah, Ah \rangle = 2|Ah|^2 > 0$ für $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
(rk $(A) = n$) ist Hess $f(x)$ positiv definit, also hat f ein lokales und damit globales Minimum an der Stelle $x = A^+b$.

4. Lokale Umkehrbarkeit

a. Der Banachsche Fixpunktsatz

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum.

Definition 4.1.
Eine Abbildung $\Phi : M \to M$ heißt **kontrahierend**, falls es ein $c \in [0, 1)$ gibt mit $\forall\, x, y \in M : d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq c \cdot d(x, y)$.

Satz 4.2 (Banachscher Fixpunktsatz)**.**
Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\Phi : M \to M$ kontrahierend. Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt $z \in M$, d.h. $\Phi(z) = z$.
Definiert man zu $x_0 \in M$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset M$ durch $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, dann gilt $x_n \to z$, $n \to \infty$, und $d(x_n, z) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$ (a priori-Abschätzung).

Beweis:
Existenz und Abschätzung:
Es gilt $d(x_n, x_{n+1}) \leq c \cdot d(x_{-1}, x_n) \leq \ldots \leq c^n \cdot d(x_0, x_1)$, und damit für $m \geq 1$:
$d(x_n, x_{n+m}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leq (1 + c + c^2 + \ldots + c^{m-1}) d(x_n x_{n+1}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1)$.
Wegen $c^n \to 0$ $(n \to \infty)$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset M$ eine Cauchy-Folge. Sei $z := \lim\limits_{n\to\infty} x_1$ (M vollständig $\Rightarrow$ Grenzwert existiert).
Als Lipschitz-stetige Funktion ist Φ insbesondere stetig.
D.h. es gilt $\Phi(z) = \Phi(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = z$.
Da $d : M \times M \to \mathbb{R}$ stetig ist, gilt analog $d(x_n, z) = d(x_n, \lim\limits_{m\to\infty} x_{n+m}) = \lim\limits_{m\to\infty} d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1)$.

Eindeutigkeit:
Seien z, z' Fixpunkte. Dann ist $d(z, z') = d(\Phi(z), \Phi(z')) \leq c \cdot d(z, z')$ und damit wegen $c < 1$: $d(z, z') = 0$, d.h. $z = z'$.

$\square$

b. Lokale Umkehrbarkeit

Satz 4.3. *(von der lokalen Umkehrbarkeit)*
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$, $a \in U$ mit $\det(f'(a)) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von a mit:

(a) $f|_V$ *ist injektiv.*

(b) $f(V)$ *ist offen.*

(c) $g := (f|_V)^{-1} : f(V) \to \mathbb{R}^n$ *ist stetig differenzierbar.*
D.h. $f|_V : V \to f(V)$ *ist ein Diffeomorphismus.*

Beweis:
O.E. sei $a = 0, f(a) = 0, f'(a) = id_{\mathbb{R}^n} = I_n$.
(sonst betrachte $g(x) := f(x + a) - f(a), h(x) := (g'(0))^{-1}g(x)$)

(i) Definition der Abbildung Φ_y:
Zu $y \in \mathbb{R}^n$ definiere $\Phi_y : U \to \mathbb{R}^n, \Phi_y(x) := x - f(x) + y$.
Es gilt $\Phi_y(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

(ii) Wahl der Umgebung:
Wegen $f'(0) = I_n$ und $f' : U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig $\exists\ r > 0\ \forall\ x, |x| \leq 2r$: $\|\Phi_y'\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} = \| \underbrace{I_n - f'(x)}_{=0,x=0} \|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}$
Nach dem Mittelwertsatz existieren zu $x \in B(0, 2r)$ Zahlen $\theta_1, \ldots, \theta_n \in (0, 1)$ mit $|x - f(x)| = |\Phi_0(x) - \Phi_0(0)| = |(\Phi_{0,j}'(\theta_j x))_{j=1,\ldots,n} \cdot x| \leq \frac{1}{2}|x|$. Für $|y| < r$ und $|x| \leq 2r$ folgt
$|\Phi_y(x)| \leq |x - f(x)| + |y| < 2r$.

D.h. für $|y| < r$ ist $\Phi_y(\overline{B(0, 2r)}) \subset \overline{B(0, 2r)}$.
Insbesondere folgt für $\Phi_y(x) = x \Rightarrow |x| < 2r$. (*)

(iii) Kontraktionseigenschaft:
Mittelwertsatz: $\Phi_{y,j}(x_1) - \Phi_{y,j}(x_2) = \Phi_{y,j}'(x_1 + \theta_j(x_2 - x_1))(x_2 - x_1), \theta_j \in (0, 1)$.
Also $|\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1|$.

(iv) Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes:
Nach (ii) und (iii) ist für $|y| < r$ die Abbildung $\Phi_y : \overline{B(0,2r)} \to \overline{B(0,2r)}$ eine Kontraktion.
Damit gilt: $\forall\ y \in B(0,r)\ \exists_1 x \in \overline{B(0,2r)} : f(x) = y$.
Wegen (*) gilt sogar $x \in B(0,2r)$.

(v) Definiere $V := f^{-1}(B(0,r) \cap B(0,2r)$. Da f stetig ist, ist V offen und $f|_V : V \to f(V)$ ist bijektiv.

(vi) Um (c) zu zeigen, reicht es, die Stetigkeit von g zu zeigen. Denn dann gilt nach Satz 2.17: $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$, d.h. $g' : f(V) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist stetig.

Seien also $x_1, x_2 \in \overline{B(0,2r)}, y_i := f(x_i), i = 1,2$.
Dann ist $\Phi_0(x_i) = x_i - y_i$, d.h. $x_1 - x_2 = \Phi_0(x_1) - \Phi_0(x_2) - f(x_1) + f(x_2)$ und damit $|x_1 - x_2| \le \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + |f(x_1) - f(x_2)|$
Also $|g(y_1) - g(y_2)| \le 2|y_1 - y_2|$, d.h. g ist (sogar Lipschitz-)stetig.

$\square$

Bemerkung 4.4.
Falls sogar $f \in C^k(U;\mathbb{R}^n), k \ge 1$, folgt auch $g \in C^k(f(V);\mathbb{R}^n)$, d.h. $f|_V : V \to f(V)$ ist C^k-Diffeomorphismus.
Dies folgt aus der Darstellung von g' nach Satz 2.17.

Beispiel 4.5.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$, $\det(f'(x)) = 4(x_1^2 + x_2^2) \ne 0, x \ne 0$.
f ist also für $x \ne 0$ lokal umkehrbar. Wegen $f(-x) = f(x)$ ist f nicht global umkehrbar. Für $x_1, x_2 > 0$ gilt nach dem Mittelwertsatz:
$f(x+h) = f(x) + \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(c^{(1)}) & \partial_2 f_1(c^{(1)}) \\ \partial_1 f_2(c^{(2)}) & \partial_2 f_2(c^{(2)}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ mit $c^{(1)} = x\theta_1 h, c^{(2)} = x + \theta_2 h, \theta_1, \theta_2 \in (0,1)$.
Wegen $\det(A(c^{(1)}, c^{(2)})) := \det\begin{pmatrix} 2c_1^{(1)} & -2c_2^{(1)} \\ 2c_1^{(2)} & 2c_2^{(2)} \end{pmatrix} = 4(c_1^{(1)}c_2^{(2)} + c_1^{(2)}c_2^{(1)}) > 0$ für alle $c^{(1)}, c^{(2)} \in (0,\infty)^2$ folgt
$f(x+h) = f(x) \Rightarrow A(c^{(1)}, c^{(2)})h = 0 \Rightarrow h = 0$.
Also ist $f|_{(0,\infty)^2}$ injektiv, also in $(0,\infty)^2$ *global* invertierbar.

c. Der Satz über implizite Funktionen

Betrachte die Gleichung $f(x,u) := x + x^2 - u^2 = 0$.
Diese Gleichung beschreibt x als Funktion von u in impliziter Weise, wobei x nicht unbedingt eindeutig sein muss. (*hier:* $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + u^2}$). Die Frage ist, wann $f(x,u) = 0$ (zumindest lokal) eindeutig nach x auflösbar ist.

Manche Gleichungen haben keine (reelle) Lösung, z.B. $1 + x^2 + u^2 = 0$. Allgemein sei $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, f : \mathbb{R}^{n+m} \supset D \to \mathbb{R}^n$ (*d.h. n Gleichungen für n Unbekannte, vgl. Lineare Algebra*)
Im linearen Fall: $A\begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix} = 0$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$. Dies ist eindeutig nach x auflösbar, wenn $\det(A_1) \neq 0$ mit $A = [\underbrace{A_1}_{n} \ \underbrace{A_2}_{m}]n$ mit $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
Beachte $A\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = A_1 x + A_2 u = 0$.

Sei also $D \subset \mathbb{R}^{n+m}, f : D \to \mathbb{R}^n, (x,u) \mapsto f(x,u)$. Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt **Auflösung**, wenn $f(\varphi(u), u) = 0$. Wir zerlegen f' wie vorher A : $f'(x,u)\begin{pmatrix} h^{(1)} \\ h^{(2)} \end{pmatrix} = f_1'(x,u)h^{(1)} + f_2'(x,u)h^{(2)}$ mit

$$f_1'(x,u) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n f_n & \dots & \partial_n f_n \end{pmatrix}, f_2'(x,u) := \begin{pmatrix} \partial_{n+1} f_1 & \dots & \partial_{n+m} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n+1} f_n & \dots & \partial_{n+m} f_n \end{pmatrix}$$

Satz 4.6 (über implizite Funktionen)**.**
Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *offen,* $f \in C^1(D; \mathbb{R}^n)$*. Sei* $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ *mit* $f(a,b) = 0$*, und* $\det(f_1'(a,b)) \neq 0$.
Dann existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ *von* b *und eine eindeutige Funktion* $\varphi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ *mit* $\varphi(b) = a$ *und* $f(\varphi(u), u) = 0$ $(u \in U)$.

Beweis:
Sei $F : D \to \mathbb{R}^{n+m}, F(x,u) := \begin{pmatrix} f(x,u) \\ u \end{pmatrix}$. Dann ist F stetig differenzierbar, und $F'(x,u) = \begin{pmatrix} f_1'(x,u) & f_2'(x,u) \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$. Also ist $\det(F'(x,u)) = \det(f_1'(x,u)) \neq 0$ für $(x,u) = (a,b)$.
Nach dem Satz von der lokalen Umkehrbarkeit 4.3 existiert eine Umgebung $W \subset D$, so dass $F|_W : W \to F(W)$ ein Diffeomorphismus ist.

Sei $G : F(W) \to W$ die Umkehrabbildung. Aus $F\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,u) \\ u \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ folgt $G\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ mit $u = v$. Setze $g\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} := x$ (Projektion von G auf die ersten n Komponenten). Dann ist $g \in C^1(F(W); \mathbb{R}^n)$.
Setze $\varphi(v) := g\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$. Dann gilt:

(a) $D(G) = F(W)$ ist offen, d.h. es existiert eine Umgebung U von b mit $\forall\ v \in U : \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \in D(G)$.

(b) Es gilt $F \circ G = id_{\mathbb{R}^{n+m}}$, d.h. $f\begin{pmatrix} g(y,v) \\ v \end{pmatrix} = y$.
Für $y = 0$ erhält man (mit $v = u$): $f(\varphi(u), u) = 0$.

(c) Die Auflösung ist eindeutig: Nach Definition von g gilt $g\begin{pmatrix} f(x,u) \\ u \end{pmatrix} = x$. Aus $f(x,u) = 0$ folgt $x = g\begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} = \varphi(u)$.

□

Bemerkung 4.7.
Aus $f(\varphi(u), u) = 0$ folgt
$0 = f'(\varphi(u), u)\begin{pmatrix} \varphi'(u)h^{(2)} \\ h^{(2)} \end{pmatrix} = [f_1'(\varphi(u), u)\varphi'(u) + f_2'(\varphi(u), u)]h^{(2)}$ für alle $h^{(2)} \in \mathbb{R}^m$.
Also $\varphi'(u) = -(f_1'(\varphi(u), u))^{-1} f_2'(\varphi(u), u))$.

Beispiele 4.8.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,u) = x + x^2 - u^2$. Es ist $f(0,0) = 0$.
$f_1'(x,u) = 1 + 2x = 1$ für $(x,u) = (0,0)$. Also ist $f(x,u) = 0$ in einer Umgebung von $n = 0$ eindeutig nach x auflösbar, und zwar durch $\varphi(u) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + u^2}$.
Beachte $f(0,0) = 0$ und damit $\varphi(0) = 0$, d.h. wir müssen „+“ wählen.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$
Dann gilt $f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$, d.h. $\det(f'(x)) = x_1 - x_2$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $f(a) = b$ und $a_1 \neq a_2$. Dann existiert eine Umgebung U von b und $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ mit $f(\varphi(y)) = y$ $(y \in U)$.
Betrachte nun das Polynom $p(t; y_1; y_2) := t^2 - y_1 t + y_2$. Für $y = b \in \mathbb{R}^2$ besitze dieses zwei reelle Nullstellen $a_1 \neq a_2$. Dann ist $p(t; b_1; b_2) = (t - a_1)(t - a_2) = t^2 - (a_1 + a_2)t + a_1 a_2$.
D.h.: $f(a) = b$. Also hat die Gleichung $p(t; y_1; y_2) = 0$ für $y \in U$ die Nullstellen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \varphi_2(y) \end{pmatrix}$. Da $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, gilt nach Bemerkung 4.4 auch $\varphi \in C^\infty(U; \mathbb{R}^2)$.
Insgesamt: falls das Polynom $t^2 - y_1 t + y_2$ für ein $y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ zwei verschiedene Nullstellen besitzt, so besitzt a für alle y in einer Umgebung von b zwei verschiedene Nullstellen x_1, x_2, und diese sind C^∞-Funktionen der Koeffizienten y_1, y_2.
Das gleiche gilt für Polynome beliebigen Grades ohne doppelte Nullstellen.

5. Extrema unter Nebenbedingungen

Nochmal der Quader: das Volumen eines Quaders mit Kantenlängen x_1, x_2, x_3 ist $f(x) = x_1x_2x_3$.
Die Nebenbedingung $x_1+x_2+x_3 = 3$ reduziert die auf die Funktion $x_1x_2(3-x_1-x_2)$.
Dazu muss man die Nebenbedingung nach x_3 auflösen, was manchmal schwer oder nur lokal möglich ist, z.B. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.
Besser ist es, die Nebenbedingung direkt zu übernehmen. Dazu ein einfaches Beispiel: sei $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ unter der Nebenbedingung $g(x) := x_1 + x_2 - 2 = 0$ (Fläche des Rechtecks).
Nehme an, es gibt eine Funktion $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \equiv 0$, z.B. $\varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = 2 - t$.
Dann suche das Extremum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ durch Ableiten von $h(t) := f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = f(\varphi(t))$.
D.h. suche t_0 mit $0 = h'(t_0) = \partial_1 f(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_1'(t_0) + \partial_2 f(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_2'(t_0)$.
Wegen $g(\varphi(t)) \equiv 0$ gilt auch $0 = \partial_1 g(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_1'(t_0) + \partial_2 g(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_2'(t_0)$.
Also folgt für $x_0 := \varphi(t_0)$:
$\begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) & \partial_2 f(x_0) \\ \partial_1 g(x_0) & \partial_2 g(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Falls $\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_2(t_0) \end{pmatrix} \neq 0$ folgt, dass die Matrix singulär ist. Also sind $\nabla f(x_0)$ und $\nabla g(x_0)$ linear abhängig.
Falls $\nabla g(x_0) \neq 0$, heißt das:
$\exists\ \lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$.

λ_0 heißt **Lagrange-Multiplikator**.
Zusammen mit $g(x_0) = 0$ kann man x_0 bestimmen, ohne φ zu berechnen!

Im Beispiel: $f(x) = x_1x_2, g(x) = x_1 + x_2 - 2$:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lagrange: $\exists\ \lambda_0 : \left.\begin{smallmatrix} x_2+\lambda_0\cdot 1=0 \\ x_1+\lambda_0\cdot 1=0 \end{smallmatrix}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2$.
Nebenbedingung: $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$.
Es ist $\lambda_0 = -1$.

Allgemein hat man Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m < n$.

Satz 5.1 (Extrema unter Nebenbedingung).
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U;\mathbb{R})$, $g \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$, $m < n$. Es gelte $rk(g'(x)) = m$ (voller Rang) $(x \in U)$. Sei $M := \{x \in U : g(x) = 0\}$ (Nebenbedingung).
Falls $f|_M$ ein lokales Extremum an der Stelle $x_0 \in M$ besitzt, so existiert $\lambda^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ mit $f'(x_0) + (\lambda^{(0)})^t g'(x_0) = 0$, d.h. $\nabla f(x_0) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x_0) = 0$.
$\lambda^{(0)}$ heißt Lagrange-Multiplikator (zwei Nebenbedingungen $\Leftrightarrow$ zwei λs).

Beweis:
Wegen $rk(g'(x_0)) = m$ gibt es Indizes $i_1, \dots, i_m$ mit

$$\det \frac{\partial g}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})} := \det \begin{pmatrix} \partial_{i1} g_1(x_0) & \dots & \partial_{im} g_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{i1} g_m(x_0) & \dots & \partial_{im} g_m(x_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sei O.E. $i_1 = 1, \dots, i_m = m$. Setze $x = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ u \end{pmatrix}, \overline{x} \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^p, m + p = n$, und $x_0 = \begin{pmatrix} \overline{x_0} \\ u_0 \end{pmatrix}$.
Nach dem Satz über implizite Funktionen kann die Gleichung $g(\overline{x}, u) = 0$ in einer Umgebung von u_0 nach $\overline{x}$ aufgelöst werden:
$\overline{x} = \varphi(u)$ mit $\varphi : \mathbb{R}^p \supset V(u_0) \to \mathbb{R}^m$. Die Funktion $G(u) := f(\varphi(u), u)$ hat an der Stelle u_0 ein Extremum, daher ist

$$0 = G'(u_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{(\varphi(u_0), u_0)}_{=x_0} \varphi'(u_0) + \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(u_0, u_0)) \cdot 1.$$

Nach Bemerkung 4.7 gilt $\varphi'(u_0) = -\left(\frac{\partial g}{\partial \overline{x}}(x_0)\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial u}(x_0)$.
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(x_0) \left(\frac{\partial g}{\partial \overline{x}}(x_0)\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial u}(x_0) = 0$.
Sei $\frac{\partial f}{\partial \overline{x}}(x_0) + (\lambda^{(0)})^t \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{x}}(x_0) = 0$.
Also insgesamt $f'(x_0) + (\lambda^{(0)})^t g'(x_0) = 0$.

Wegen $f'(x_0) = (\nabla f(x_0))^t, g'(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x_0)^t \\ \vdots \\ \nabla g_m(x_0)^t \end{pmatrix}$ folgt $\nabla f(x_0) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j^{(0)} \nabla g_j(x_0) = 0$.

□

Bemerkung 5.2.
Sei in obiger Situation $F : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \mapsto f(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$.
Wir haben gesehen, dass $(x_0, \lambda^{(0)})$ ein kritischer Punkt von F ist, denn $F'(x, \lambda) =$

$(f'(x) + \sum\limits_j \lambda_j g_j'(x), g_1(x), \dots, g_m(x)) = 0$ für $(x, \lambda) = (x_0, \lambda^{(0)})$.

Falls $F''(x_0, \lambda^{(0)}, h, h) > 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^{n \times m}$, folgt insbesondere
$F(x_0, \lambda^{(0)}) \leq F(x, \lambda^{(0)})\ \forall\ x \in U(x_0)$.
Damit auch $f(x_0) \leq f(x)$ für $x \in U(x_0) \cap M$.
Wir erhalten ein lokales Minimum unter der Nebenbedingung. Man sieht, dass schon $F''(x_0, \lambda^{(0)}, h, h) > 0$ für $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (n Nullen) für ein lokales Minimum genügt.

Beispiel 5.3 (nochmal das Volumen des Quaders)**.**
$f : (0,3)^3 \to \mathbb{R}, f(x) = x_1x_2x_3, g(x) := x_1 + x_2 + x_3 - 3$.
Es ist $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}, \nabla g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Lagrange: $\exists\ \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$

$x_2x_3 + \lambda = 0$ (1)
$x_1x_3 + \lambda = 0$ (2)
$x_1x_2 + \lambda = 0$ (3)
Nebenbedingung: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
(1) und (2) $\Rightarrow x_1 = x_2$, (2) und (3) $\Rightarrow x_2 = x_3$
mit Nebenbedingung: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Sei $F(x, \lambda) := f(x) + \lambda g(x)$. Die Hessematrix
$F''(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 & 1 \\ x_3 & 0 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht definit.

Beispiel 5.4 (Young'sche Ungleichung)**.**
Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sei $f(x) := \frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^q}{q}, g(x) := x_1x_2 - 1, x_1, x_2 > 0$

Lagrange:
$x_1^{p-1} + \lambda x_2 = 0$
$x_2^{q-1} + \lambda x_1 = 0$

Nebenbedingung: $x_1 x_2 = 1$.
$\Rightarrow x_1^p = x_2^q, x_2 = x_1^{\frac{p}{q}}$
aus NB: $x_1^{1+\frac{p}{q}} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 = x_2$.
Auf den Nachweis, dass hier ein Minimum vorliegt, wird hier verzichtet.
Es gilt also $f(x) \geq f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Setzt man $x_1 := \frac{\alpha}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{p}}}, x_2 := \frac{\beta}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{q}}}$ mit $\alpha, \beta > 0$, so erhält man
$\frac{\alpha^p}{p \cdot \alpha\beta} + \frac{\beta^q}{q\alpha\beta} \geq 1$, d.h. $\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \geq \alpha\beta$ (Young'sche Ungleichung).

Beispiel 5.5.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A = A^t$ (symmetrisch), $f(x) := \langle x, Ax \rangle$ (quadratische Form). Sei $g(x) := |x|^2 - 1 = x^t x - 1$.
Die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Die Funktion f ist stetig, also nimmt $f|_M$ sein Maximum an.
Also existiert ein $x_1 \in M$ mit $f(x_1) = \max\limits_{x \in M} f(x)$.
Nach Lagrange gilt: $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$ *(„- " hier nur Konvention).*
Es ist $\nabla f(x) = 2Ax, \nabla g(x) = 2x$. Also $\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}$: $Ax_1 = \lambda_1 x_1$.
Damit ist λ Eigenwert, x_1 Eigenvektor, und $f(x_1) = \langle x_1, Ax_1 \rangle = \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle = \lambda_1$.
Für den größten Eigenwert

$$\boxed{\lambda_1 \text{ folgt: } \lambda_1 = \max_{|x|=1} \langle x, Ax \rangle = \max_{x \neq 0} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}}$$

Betrachtet man $M_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = 1, \langle x, x_1 \rangle = 0\}$, so besitzt $f|_{M_1}$ wieder sein Maximum. Ähnlich wie vorher sieht man, dass die Maximalstelle $x_2 \in M_1$ ein Eigenvektor zu $\lambda_2 \leq \lambda_1$.
Iteriert man dies, erhält man n zueinander orthogonale Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Wir haben gezeigt, dass jede symmetrische Matrix orthogonal ist.

Beispiel 5.6 (Portfolio-Optimierung)**.**
Ein Anleger hat die Wahl, sein Kapital in einer festverzinslichen Anleihe mit 2% Zinssatz oder in Aktien zu investieren. Für die Aktie sind nach einem Jahr zwei Zustände möglich:
Boom mit 10% Ertrag
Rezession mit 5% Verlust
Beide Zustände sind gleich wahrscheinlich. Das Startkapital sei $K = 10$.
Der Besitz eines Kapitals z bringt dem Anleger einen Nutzen von $\ln z$ (Nutzenfunktion). Wieviel Kapital soll der Anleger in Aktien investieren?

Ansatz: x_1 := in festversinslich investiertes Kapital,
x_2 := in Aktien investiert.
Nebenbedingung: $x_1 + x_2 = K$.

Nutzen:
Boom: $\ln(x_1(1+r) + x_2 \cdot u)$ $r = 0.02$ (Zins), $u = 1,1$
Rezession: $\ln(x_1(1+r) + x_2 \cdot d)$ $d = 0,95$
Durchschnittlich zu erwartender Nutzen:
$f(x) := \frac{1}{2}\ln(x_1(1+r) + x_2 u) + \frac{1}{2}\ln(x_1(1+r) + x_2 d)$

Lagrange: $\nabla f(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1+r}{x_1(1+r)+x_2u} + \frac{1+r}{x_1(1+r)+x_2d} \\ \frac{u}{x_1(1+r)+x_2u} + \frac{d}{x_1(1+r)+x_2d} \end{pmatrix}$, $\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0 \Rightarrow \frac{1+r}{x_1(1+r)+x_2u} + \frac{1+r}{x_1(1+r)+x_2d} = \frac{u}{x_1(1+r)+x_2u} + \frac{d}{x_1(1+r)+x_2d} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ mit $\alpha_1 = \frac{1+r}{1+r-u} + \frac{1+r}{1+r-d}$, $\alpha_2 := \frac{u}{1+r-u} + \frac{d}{1+r-d}$

Nebenbedingung: $x_1 + x_2 = K$: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2(K - x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}K$, $x_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1-x_2}K$.
$x_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}K = \ldots = -\frac{1}{2}\left(\frac{u}{1+r-u} + \frac{d}{1+r-d}\right)K$.
Eingesetzt: $r = 0.02, K = 10, u = 1.1, d = 0.95$: $x_1 = 0.89, x_2 = 9.11$.

r	0.01	0.02	0.03	0.04
x_1	-18.06	0.89	19.20	38.89

6. Kurven und Flächen

Wiederholung:
Ein Weg im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.
Aber es gibt Wege $\gamma[0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit Wertebereich $\gamma([0,1]) = [0,1]^2$

Definition 6.1.
Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt **glatt**, falls γ stetig differenzierbar ist und an jeder Stelle $\gamma'(s) \neq 0$ $s \in (a,b)$ gilt.

Ein Punkt $s \in [a,b]$ heißt **regulär**, falls $\gamma'(s) \neq 0$, sonst **singulär**.
γ heißt **stückweise glatt**, falls γ aus endlich vielen glatten Wegen zusammengesetzt ist.
Für glatte Wege heißt $t : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t(s) := \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}$ der **Tangenteneinheitsvektor**.

Beispiel 6.2.

(a) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ - (Kreis).

(b) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$ - (zweimal Kreis).

(c) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ - (Schraube).

(d) $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{cases} (-t^2, 0) & 1 \leq x \leq 0 \\ (0, t^2) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.
γ ist C^1, aber γ ist nicht glatt, weil $\gamma'(0) = 0$.

Bemerkung 6.3.

(a) Beachte: $\gamma'(s) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\gamma(s+t)-\gamma(s)}{t}$.

$x = \gamma(s) + r(\gamma(s+t) - \gamma(s))$.
Für $t \to 0$ erhält man die **Tangente** an $\gamma(s)$

(b) Der Winkel φ zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch $\cos(\varphi) = \frac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}$.
Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ zwei glatte Wege mit

$\gamma_1(s_0) = \gamma_2(t_0)$. Der Schnittwinkel ist dann definiert durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \gamma_1'(s_0), \gamma_2'(t_0) \rangle}{|\gamma_1'(s_0)| \cdot |\gamma_2'(t_0)|}$$

Definition 6.4.
Zwei Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \mu : [c,d] \to \mathbb{R}^n$.
heißen äquivalent, wenn eine stetige Abbildung $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ existiert, die bijektiv und streng monoton wachsend ist, so dass $\mu = \gamma \circ \varphi$.
Eine Äquivalenzklasse $\Gamma = [\gamma]$ heißt stetige Kurve.

Zwei (stückweise) glatte Wege heißen äquivalent, wenn $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar, bijektiv und wenn $\varphi' > 0$ ist.
Eine Äquivalenzklasse heißt glatte Kurve.

Definition 6.5.
Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Für eine **Zerlegung** $Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ definiere

$$l(Z) = \sum_{j=1}^{k} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$$

Die **Bogenlänge** von Γ ist definiert durch $L(\Gamma) = \sup\{l(Z) : Z \textit{ ist Zerlegung}\}$.

Γ heißt **rektifizierbar**, wenn $L(\Gamma) < \infty$.

Gilt $\Gamma = [\gamma] = [\mu] \Rightarrow \gamma = \mu \circ \varphi, \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \mu : [c,d] \to \mathbb{R}^n$, dann definiert jede Zerlegung $Z : c = t_0 < \ldots < t_k = d$ von $[c,d]$ eine Zerlegung $\widetilde{Z} : a = \varphi(c) < \ldots < \varphi(t_k) = b$ von $[a,b]$.
Schreibe auch $L(\gamma) := L(\Gamma) = L([\gamma])$.

Satz 6.6.
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist $\Gamma = [\gamma]$ rektifizierbar und $L(\Gamma) = \int\limits_a^b |\gamma'(s)|\, ds$.

Beweis:
γ' stetig, $[a, b]$ kompakt $\Rightarrow \gamma'$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow \ \forall\ \delta > 0, \varepsilon > 0 : |t - \widetilde{t}| < \delta \Rightarrow$ $|\gamma'(t) - \gamma'(\widetilde{t})| < \varepsilon$.

Sei $Z : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ eine Zerlegung mit **Feinheit** $|Z| := \max\limits_{j=1,\ldots,k} |t_j - t_{j-1}| <$ δ.

Der Mittelwertsatz für jede Komponente von γ liefert $\gamma_i(t_1) - \gamma_i(t_0) = \gamma_i'(\theta_i)(t_1 - t_0)$ für $\theta_i \in (t_0, t_1)$.
Also $|\gamma_i(t_1) - \gamma_i(t_0) - \gamma_i'(t_0)(t_1 - t_0)| \leq |\gamma_i'(t_1) - \gamma_i'(t_0)| \cdot |t_1 - t_0| < \varepsilon |t_1 - t_0|$
d.h. es folgt
$||\gamma(t_1) - \gamma(t_0) - \gamma'(t_0)(t_1 - t_0)||_\infty < \varepsilon |t_1 - t_0|$.
Im $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent $\Rightarrow$
$|\gamma(t_1) - \gamma(t_0) < \gamma'(t_0)(t_1 - t_0)| < c \cdot \varepsilon |t_1 - t_0|$
Genauso: $|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) - \gamma'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})| < c\varepsilon |t_j - t_{j-1}|$

$$\Rightarrow \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|\, dt - |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \right|$$

$$= \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t_{j-1}) + \underbrace{\gamma'(t) - \gamma'(t_{j-1})|}_{Norm < \varepsilon}\, dt - |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t_{j-1})| + \underbrace{|\gamma'(t) - \gamma'(t_{j-1})|}_{< \varepsilon}\, dt - |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t_{j-1})\, dt - |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| + \varepsilon |t_j - t_{j-1}| \right|$$

$$\leq \Big| |\gamma'(t_{j-1})| \cdot |t_j - t_{j-1}| - |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \Big| + \varepsilon |t_j - t_{j-1}|$$

$$\leq |\gamma'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1}) - (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))| + \varepsilon |t_j - t_{j-1}|$$

$$\leq (c + 1)\varepsilon (t_j - t_{j-1}).$$

$$\left| \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt - \sum_{j=1}^k |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \right| = \left| \sum_{j=1}^k \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|\, dt - |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \right) \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)|\, dt - |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} (c+1)\varepsilon(t_j - t_{j-1}) = (c+1)\varepsilon(b-a).$$

$\Rightarrow$ Falls die Feinheit $|Z|$ von Z gegen 0 geht, so konvergiert $l(Z)$ gegen $\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$.

□

Definition:
Seien $\Gamma_1 = [\gamma_1], \Gamma_2 = [\gamma_2]$ zwei Kurven, $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Dann sei die zusammenhängende Kurve $\Gamma = [\gamma_2 * \gamma_1]$ erklärt durch

$$\gamma_2 * \gamma_1 : [a, b+d-c], \gamma_2 * \gamma_1(s) = \begin{cases} \gamma_1(s) & , s \in [a,b] \\ \gamma_2(s-b+c) & , s \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Schreibe auch $\Gamma = \Gamma_2 * \Gamma_1 = \Gamma_2 + \Gamma_1$.

Beispiel 6.7.

(a) Strecke von x nach y: $\gamma(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$.
Länge: $L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^1 |y-x|\, dt = |y-x| \cdot 1$.

(b) Kreislinie: $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.
Länge: $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right| = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$.
Die ist genau die früher definierte Bogenlänge.

Lemma 6.8.

*(a) Sei $\Gamma = \Gamma_2 * \Gamma_1$ (zusammengesetzte Kurve).
Dann ist $L(\Gamma) = L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)$.*

*(b) Sei $\gamma_k : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ eine Folge glatter Wege, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg mit $\|\gamma_k - \gamma\|_{C^1} := \sup_{t\in[a,b]} |\gamma_k(t) - \gamma(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |\gamma_k'(t) - \gamma'(t)| \to 0$ für $k \to \infty$.
Dann gilt $L(\gamma_k) \to L(\gamma)$ für $k \to \infty$.*

Analog für stückweise glatte Wege.

(c) *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|Ax| = |x|$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ (d.h. A ist eine Isometrie).*
Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $L(\gamma) = L(A\gamma + b)$.

Beweis:

(a) direkt aus der Definition der Bogenlänge oder (für glatte Wege) aus $\int_a^c \ldots = \int_a^b \ldots + \int_b^c \ldots$.

(b) Satz I.8.22 über Integralkonvergenz.

(c) Nach Produktregel ist $(A\gamma + b)' = A\gamma'$ und damit $|(A\gamma + b)'| = |A\gamma'| = |\gamma'|$.

□

Bemerkung 6.9.
Die Aussage (b) gilt nicht für die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$-Norm. D.h. es existieren stückweise glatte Wege $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}, \gamma$, mit $\|\gamma_k - \gamma\|_\infty \to 0, k \to \infty$, aber $L(\gamma_k) \nrightarrow L(\gamma)$.

Bemerkung 6.10.
Die Bogenlänge einer Kurve ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten. Besonders interessant sind Repräsentanten mit $|\gamma'(t)| = 1$ für alle t. Diese heißen nach **Bogenlänge parametrisiert**.
(die Kurve wird also mit gleichmäßiger Geschwindigkeit durchlaufen)

Dazu sei $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Repräsentant und Γ glatt. Definiere $\psi : [a,b] \to [0,L], \psi(s) := \int_a^s |\gamma'(t)|\,dt = L(\gamma|_{[a,s]})$.
Wegen $|\gamma'(t)| > 0$ für alle t ist ψ streng monoton steigend, d.h. $\psi^{-1} : [0,L] \to [a,b]$ existiert. $(L = L(\gamma))$.
Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $\psi'(s) = |\gamma'(s)|$, d.h. für $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ \psi^{-1}$ ist $|\widetilde{\gamma}'(t)| = |\gamma'(\psi^{-1}(t)) \cdot (\psi^{-1})'(t)| = \frac{|\gamma'(\psi^{-1}(t))|}{|\gamma'(\psi^{-1}(t))|} = 1$.

Bemerkung 6.11.
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ glatt. Interpretiert man t als Zeit, so ist $\gamma'(t)$ als Geschwindigkeitsvektor aufzufassen.

Sei nun γ nach Bogenlänge parametrisiert, d.h. $|\gamma'(t)| \equiv 1$. Dann ist $\gamma'(t)$ der Tangenteneinheitsvektor.
Falls γ zweimal differenzierbar ist, heißt γ'' der **Beschleunigungsvektor** oder der **Krümmungsvektor**, und $\kappa(t) := |\gamma''(t)|$ heißt die **Krümmung** von γ an der Stelle $\gamma(t)$.

Wegen $|\gamma'(t)| \equiv 1$ folgt $0 = \frac{d}{dt}|\gamma'(t)|^2 = \frac{d}{dt}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = 2\langle\gamma'(t), \gamma''(t)\rangle$. Also stehen Tangenten- und Krümmungsvektoren aufeinander senkrecht.

Beispiele 6.12.

(a) Strecke: $\gamma(t) = x + t(y-x), t \in [0,1]$. $\gamma'(t) = y - x$. Nach Bogenlänge parametrisiert: $\widetilde{\gamma}(t) = x + \frac{t}{|y-x|}(y-x), t \in [0, |y-x|]$. Krümmung: $\widetilde{\gamma}''(t) = 0$ für alle t, damit $\kappa = 0$.

(b) Kreis: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$. Dann ist $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ und damit $|\gamma'(t)| \equiv 1$, und $\gamma''(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$. Also ist $\kappa(t) = |\gamma''(t)| = 1$.
Kreise haben also eine konstante Krümmung.

Definition 6.13.

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $m < n$. Eine Abbildung $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$ heißt Parameterdarstellung einer m-dimensionalen Fläche in $\mathbb{R}^n$, falls γ stetig differenzierbar ist und $rk(\underbrace{\gamma'(u)}_{\in\mathbb{R}^{n\times m}}) = m$ für alle $u \in U$. Zwei solche Darstellungen heißen äquivalent, falls es einen Diffeomorphismus $\Phi : \widetilde{U} \to U$ gibt mit $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \Phi$. Die Äquivalenzklassen $\Gamma = [\gamma]$ heißen Flächen.
Falls $\det(\Phi') > 0$, so besitzen γ und $\widetilde{\gamma}$ die gleiche Orientierung.

(b) Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine m-Fläche und $u \in U$ fest.
Dann heißt $[\tau_u]$ mit $\tau_u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, h \mapsto \gamma(u) + \gamma'(u)h$ der m-dimensionale Tangentialraum zu γ an der Stelle $\gamma(u)$.

Beispiel 6.14 (Rotationsflächen).
Sei $\gamma(u,v) := \begin{pmatrix} f(u)\cos(v) \\ f(u)\sin(v) \\ g(u) \end{pmatrix}$ mit $f(u) > 0$, $\begin{pmatrix} f'(u) \\ g'(u) \end{pmatrix} \neq 0$, $u \in U$.
Dabei spielt $g(u)$ die Rolle der Höhe und $f(u)$ ist der Radius des Kreises. Auf der Höhe $g(u)$ gehören alle Punkte auf der Kreislinie zur Fläche. Es gilt $\gamma'(u,v) =$

$$\begin{pmatrix} f'(u)\cos(v) & -f(u)\sin(v) \\ f'(u)\sin(v) & f(u)\cos(v) \\ g'(u) & 0 \end{pmatrix} \text{und damit } rk(\gamma'(u,v)) = 2.$$

Eine besonders einfache Parametrisierung einer Fläche ist gegeben durch $\gamma(u) = u_1, \dots, \gamma_m(u) = u_m$, $\gamma_{m+1}(u) = f_1(u), \dots, \gamma_n(u) = f_{n-m}(u)$ mit $f_i \in C^1(U;\mathbb{R})$ für $i = 1, \dots, n-m$.

$$\text{Beachte, dass } rk(\gamma') = m, \text{ wegen } \gamma'(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ & f_1'(u) & & \\ & \vdots & & \\ & f_{n-m}'(u) & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}. \tag{1}$$

Satz 6.15.
Sei $\Gamma = [\widetilde{\gamma}]$ eine m-dimensionale Fläche, $\widetilde{\gamma} : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$.
Sei $u_0 \in \widetilde{U}$ mit $\det \begin{pmatrix} \partial_1\widetilde{\gamma}_1 & \dots & \partial_m\widetilde{\gamma}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1\widetilde{\gamma}_m & \dots & \partial_m\widetilde{\gamma}_m \end{pmatrix} \neq 0.$
Dann existiert eine Umgebung W von u_0 und eine zu $\widetilde{\gamma}|_W$ äquivalente Parametrisierung der Form (1).

Beweis:
Sei $\Psi(\widetilde{U}) := \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}_1(\widetilde{u}) \\ \vdots \\ \widetilde{\gamma}_m(\widetilde{u}) \end{pmatrix}, \widetilde{u} \in U$. Dann ist $\det(\Psi'(u_0)) \neq 0$.

Nach dem Satz von der lokalen Umkehrbarkeit existiert eine Umgebung W von u_0 und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$, so dass $\Psi|_W : W \to U$ ein Diffeomorphismus ist.

$U \overleftarrow{\Psi} W \subset \widetilde{U} \overrightarrow{\widetilde{\gamma}} \mathbb{R}^n$

Setze $\Phi := (\Psi|_W)^{-1} : U \to W$ und $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(u) := (\widetilde{\gamma} \circ \Phi)(u)$. Dann gilt $\gamma_j(u) = \widetilde{\gamma}_j(\Phi(u)) = \widetilde{\gamma}_j(\widetilde{u}) = \Psi_j(\widetilde{u}) = u_j$ für $j = 1, \dots, m$.

□

Korollar 6.16.
In der Situation von Satz 6.15 lässt sich Γ lokal als Graph einer Funktion $\{(u, f(u)) : u \in U\}$ mit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$, f stetig differenzierbar, darstellen.

Ebenso lässt sich Γ *lokal als Nullstellenmenge* $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ *mit* $g : \mathbb{R}^n \supset W \to \mathbb{R}^{n-m}$, *$g$ stetig differenzierbar, darstellen.*

Beweis:
Nach Satz 6.15 ist $x_{m+1} = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, x_n = f_{n-m}(x_1, \dots, x_m)$ eine lokale Darstellung von Γ. Setze $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-m} \end{pmatrix} \in C^1(U; \mathbb{R}^{n-,m})$.

Setze $g_1(x) := x_{m+1} - f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_{n-m}(x) := x_n - f_{n-m}(x_1, \dots, x_m)$, $g := \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n-m} \end{pmatrix}$.
$\square$

Zwischenbilanz und Ausblick

Folgende Fragen treten u.a. in der Analysis mehrerer Veränderlicher auf:

Frage	beantwortet	womit?
Welcher Quader hat das größte Volumen?	✓	lokale Extrema, kritische Stellen ($\nabla f = 0$), Hesse-Matrix
Wie lege ich am besten ein Polynom durch gegebene Messpunkte (curve fitting)?	✓	Methode der kleinsten Quadrate
Portfolio-Optimierung (einfaches Bsp.)	✓	Lagrange-Multiplikatoren
Wann ist eine Funktion bijektiv?	✓	Satz von der Umkehrbarkeit
Umfang des Kreises	✓	Bogenlänge
Wie berechne ich $\sqrt{2}$	✓	Iterationsverfahren, Banachscher Fixpunktsatz
Hängen die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten ab?	✓	Satz über implizite Funktionen
Oberfläche der Einheitskugel	Nein	Integrale über Flächen
Volumen der Einheitskugel	Nein	mehrdimensionale Riemann-Integral
Schwerpunkt eines Körpers	Nein	mehrdimensionale Riemann-Integral
Stammfunktion im $\mathbb{R}^n$	Nein	Kurvenintegrale, Pfaffsche Formen
Substitution beim Integral	Nein	Transformationsformel
partielle Integration	Nein	Satz von Gauß bzw. Satz von Stokes

7. Riemann-Integral und Jordan-Inhalt

Das Integral wurde in Analysis I in zwei Schritten definiert: zuerst für Treppenfunktionen (da ist alles ganz einfach) und dann durch Grenzübergang bezüglich $\|\cdot\|_\infty$-Norm für Regelfunktionen.

Im $\mathbb{R}^n$ ist das komplizierter: selbst für Treppenfunktionen ist das Integral nicht klar: was ist z.B. das Integral der Funktion, die auf dem Einheitskreis konstant 1 ist?

Wir beginnen wieder mit (mehrdimensionalen) Intervallen.
Zu $a, b \in \mathbb{R}^n$ sei $(a, b] := \prod\limits_{j=1}^{n} (a_j, b] = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \forall\ j = 1, \dots, n : a_j < x_j \leq b_j\}$ (beachte z.B. $(a, a] = \emptyset$).
Sei $\mathbb{I}_n := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$ das System aller Intervalle. Der Inhalt eines Intervalls (in $\mathbb{R}^n$: Fläche, $\mathbb{R}^3$: Volumen) ist gegeben durch $\mu(A) := \prod\limits_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$ für $A = (a, b] \neq \emptyset$; setze $\mu(\emptyset) := 0$. (elementargeometrischer Inhalt)

zu $A \subset \mathbb{R}^n$ sei $\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A, \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$ die charakteristische Funktion.
Die zu $\mathbb{I}_n$ gehörenden Treppenfunktionen sind definiert als $\mathcal{T}_n := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | f = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i} : \alpha_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathbb{I}_n, k \in \mathbb{N}\}$.

Das Integral einer Treppenfunktion $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathcal{T}_n$ ist gegeben durch $\int f := \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i)$.

Bemerkung 7.1.
Der gesamte Integralbegriff basiert auf elementaren Eigenschaften von $\mathbb{I}_n$ und $\mathcal{T}_n$.
Dazu wird folgende Schreibweise verwendet:
$A = A_1 \dot\cup A_2$: $\Leftrightarrow A = A_1 \cup A_2$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (disjunkte Vereinigung)
$A = \dot\bigcup_{i=1}^{k} A_i$: $\Leftrightarrow A = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i, A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
Es gilt: $A, B \in \mathbb{I}_n \Rightarrow A \cap B \in \mathbb{I}_n$.
Aber im Allgemeinen: $A, B \in \mathbb{I}_n \not\Rightarrow A \cup B \in \mathbb{I}_n$ und $A, B \in \mathbb{I}_n \not\Rightarrow A \setminus B \in \mathbb{I}_n$.
Durch weitere Zerlegung von A und B sieht man, dass $A \cup B$ und $A \setminus B$ endliche Vereinigungen disjunkter Intervalle sind.

Definiere $\mathbb{A}_n := \{A \subset \mathbb{R}^n | \; \exists\, k \in \mathbb{N} \; \exists\, A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{I}_n : A = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} A_j\}$
Damit erhalten wir: $A, B \in \mathbb{I}_n \Rightarrow A \cap B \in \mathbb{I}_n$, $A \cup B \in \mathbb{A}_n$, $A \setminus B \in \mathbb{A}_n$.
($\mathbb{I}_n$ heißt ein Semiring von Mengen)
Für $\mathbb{A}_n$ gilt: $A, B \in \mathbb{A}_n \Rightarrow A \cap B \in \mathbb{A}_n$, $A \cup B \in \mathbb{A}_n$, $A \setminus B \in \mathbb{A}_n$
($\mathbb{A}_n$ ist ein (Mengen-)Ring)
Allgemein heißt ein System R von Mengen ein (Mengen-)Ring, falls

(i) $\emptyset \in R$;

(ii) $A, B \in R \Rightarrow A \cup B \in R$;

(iii) $A, B \in R \Rightarrow A \setminus B \in R$.

In diesem Fall gilt auch $A, B \in R \Rightarrow A \cap B \in R$ (wegen $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ und $A \Delta B \in R$, wobei $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$A \Delta B$ heißt die **symmetrische Differenz** von A und B.

Lemma 7.2.

(a) $\mu : \mathbb{I}_n \to [0, \infty)$ *ist ein* ***Inhalt****, d.h. falls* $A = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} A_j$ *mit* $A, A_j \in \mathbb{I}_n$*, so ist* $\mu(A) = \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(A_j)$.

(b) Die Abbildung $\mathcal{T}_n \to \mathbb{R}, f \mapsto \int f$*, ist wohldefiniert und linear.*

Beweis:

(a) Durch weitere Zerlegung der Intervalle kann man erreichen, dass eine Gitterstruktur entsteht. Für Mengen der Form $A = (a_1, b_1] \times \widetilde{A}$, $\widetilde{A} \in \mathbb{I}_{n-1}$ und $A_j = (\alpha_j, \alpha_{j+1}] \times \widetilde{A}$ mit $a_1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{k+1} = b_1$ ist die Behauptung nach Definition von μ klar wegen $b_1 - a_1 = \sum\limits_{j=1}^{k} (\alpha_{j+1} - \alpha_j)$.

(b) Sei $f = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j} = \sum\limits_{i=1}^{N} \beta_j \chi_{B_i} \in \mathcal{T}_n$.
Nach Bemerkung 7.1 gilt $A_2 \setminus A_1 \in \mathbb{A}$, also kann man $A_1, A_2, \ldots$ durch $A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots$ ersetzen und erhält eine disjunkte Darstellung.
Daher seien O.E. $A_1, \ldots, A_k$ paarweise disjunkt und $B_1, \ldots, B_N$ paarweise

disjunkt.
Wegen $A_j = \dot{\bigcup}_{i=1}^{N}(A_j \cap B_i)$ ist $f = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j} = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \sum\limits_{i=1}^{N} \chi_{A_j \cap B_i} = \sum\limits_{i,j} \alpha_j \chi_{A_j \cap B_i}$
$= \sum\limits_{i,j} \beta_i \chi_{A_j \cap B_i}$.
Dies ist eine disjunkte Darstellung mit den gleichen Mengen.

Da es sich um zwei Darstellungen der gleichen Funktion f handelt, gilt $A_j \cap B_i \neq \emptyset \Rightarrow \alpha_j = \beta_i$ (*).
Somit $\sum\limits_{j} \alpha_j \mu(A_j) = \sum\limits_{j} \alpha_j \mu\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{N}(A_j \cap B_i)\right)$
$= \sum\limits_{j} \alpha_j \sum\limits_{i} \mu(A_j \cap B_i)$ (a)
$= \sum\limits_{i,j} \alpha_j \mu(A_j \cap B_i)$
$= \sum\limits_{i,j} \beta_i \mu(A_j \cap B_i)$ (*)
$= \sum\limits_{i} \beta_i \mu(B_i)$.
D.h. $f \mapsto \int f$ ist wohldefiniert.

Seien nun $f = \sum\limits_{i} \alpha_i \chi_{A_i}, g = \sum\limits_{j} \beta_j \chi_{B_j} \in \mathcal{T}_n$. Wie vorher kann man zu $A_i \cap B_j$ übergehen, d.h. O.E. sei $g = \sum\limits_{i} \beta_i \chi_{A_i}$.
Dann ist $\int \alpha f = \sum\limits_{i} \alpha \cdot \alpha_i \mu(A_i) = \alpha \cdot \int f$ und $\int (f+g) = \sum\limits_{i} (\alpha_i + \beta_i) \mu(A_i) = \int f + \int g$.
D.h. $f \mapsto \int f$ ist linear.

□

Bemerkung 7.3.

(a) $f \in \mathcal{T}_n, f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq 0$ (betrachte disjunkte Darstellung $f = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}$, $A_1, \ldots, A_k$ disjunkt. Dann sind alle $\alpha_i \geq 0$.

(b) $f, g \in \mathcal{T}_n, f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ (wegen $g - f \geq 0$).

(c) $f \in \mathcal{T}_n \Rightarrow |f| \in \mathcal{T}_n$ und $|\int f| \leq \int |f|$ (denn $|f| = \sum\limits_{i} |\alpha_i| \chi_{A_i}$ für eine disjunkte Zerlegung).

(d) $f, g \in \mathcal{T}_n \Rightarrow \max\{f, g\} \in \mathcal{T}_n$, $\min\{f, g\} \in \mathcal{T}_n$, $f \cdot g \in \mathcal{T}_n$ (alles klar für Darstellung mit gleichen Mengen).

Definition 7.4.
Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ (Abschluss) der **Träger** von f (support).

Sei $\mathcal{F}_n := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | \operatorname{supp} f$ kompakt, f beschränkt$\}$. Für $f \in \mathcal{F}_n$ heißt
$\overline{\int} f := \inf\{\int \varphi : \varphi \in \mathcal{T}_n, \varphi \geq f\}$ das **Oberintegral** von f.
$\underline{\int} f := \sup\{\int \varphi : \varphi \in \mathcal{T}_n, \varphi \leq f\}$ das **Unterintegral** von f.

f heißt Riemann-integrierbar, falls $\overline{\int} f = \underline{\int} f =: \int f$.
Setze $\mathcal{R}_n := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} | f$ ist Riemann-integrierbar$\}$.

Satz 7.5.

(a) $f \leq g \Rightarrow \overline{\int} f \leq \overline{\int} g$ $(f, g \in \mathcal{F}_n)$; *(monoton)*

(b) $|\overline{\int} \varphi| \leq \overline{\int} |\varphi| (= \int |\varphi|)$ $(\varphi \in \mathcal{F}_n)$;

(c) $\overline{\int} \alpha f = \alpha \overline{\int} f$ $(\alpha \geq 0, f \in \mathcal{F}_n)$; *(positiv homogen)*

(d) $\overline{\int} (f + g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g$ $(f, g \in \mathcal{F}_n)$; *(subadditiv)*

(e) $|\overline{\int} f - \overline{\int} g| \leq \overline{\int} |f - g|$ $(f, g \in \mathcal{F}_n)$.

Beweis:

(a) klar

(b) klar

(c) Sei $\overline{\int} f < s$. Dann existiert eine Treppenfunktion φ mit $f \leq \varphi$, $\int \varphi < s$. Somit $\alpha f \leq \alpha\varphi$ und damit $\overline{\int} \alpha f \leq \int \alpha\varphi = \alpha \int \varphi < \alpha \cdot s$ (O.E. $\alpha > 0$).
Da $s > \overline{\int} f$ beliebig war, folgt $\overline{\int} \alpha f \leq \alpha \overline{\int} f$. Für $r > 0$ folgt $\overline{\int} f = \overline{\int} r \cdot \frac{1}{r} f \leq r \cdot \overline{\int} \frac{1}{r} f$, d.h. $\frac{1}{r} \overline{\int} f \leq \overline{\int} \frac{1}{r} f$.
Setze $\alpha := \frac{1}{r}$: $\overline{\int} \alpha f \geq \alpha \overline{\int} f$.

(d) Sei $\overline{\int} f + \overline{\int} g < s$. Dann existieren $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}_n$ mit $\varphi_1 \geq f, \varphi_2 \geq g$. $\int \varphi_1 + \int \varphi_2 < s$. Wegen $\varphi_1 + \varphi_2 \geq f + g$ ist $\overline{\int} (f + g) \leq \int (\varphi_1 + \varphi_2) = \int \varphi_1 + \int \varphi_2 < s$. Da s beliebig war, folgt $\overline{\int} (f + g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g$.

(e) Es gilt $f \leq |f-g| + g$ und damit $\overline{\int} f \leq \overline{\int}(|f-g|+g) \leq \overline{\int}|f-g| + \overline{\int} g$.
Also: $\overline{\int} f - \overline{\int} g \leq \overline{\int}|f-g|$.
Vertauscht man f und g, erhält man $\overline{\int} g - \overline{\int} f \leq \overline{\int}|f-g|$,
also $|\overline{\int} f - \overline{\int} g| \leq \overline{\int}|f-g|$.

$\square$

Satz 7.6 (Charakterisierung integrierbarer Funktionen).
Für $f \in \mathcal{F}_n$ sind äquivalent:

(i) f ist Riemann-integrierbar, d.h. $\overline{\int} f = \underline{\int} f$;

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \varphi \in \mathcal{T}_n : \overline{\int}|f-\varphi| < \varepsilon$;

(iii) es existiert eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_n$ mit $\overline{\int}|f-\varphi_k| \to 0$ für $k \to \infty$.

In diesem Fall gilt für jede Folge wie in (iii):

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k$$

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii):
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}_n$ mit $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ und $\int \varphi_2 - \int \varphi_1 < \varepsilon$. Dann gilt $|f-\varphi_1| = f - \varphi_1 \leq \varphi_2 - \varphi_1$ und damit $\overline{\int}|f-\varphi_1| \leq \int(\varphi_2-\varphi_1) = \int \varphi_2 - \int \varphi_1 < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (i):
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\varphi \in \mathcal{T}_n$ mit $\overline{\int}|f-\varphi| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Nach Definition von $\overline{\int}\ldots$ existiert ein $\psi \in \mathcal{T}_n$ mit $|f-\varphi| \leq \psi$ und $\int \psi < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $\varphi - \psi \leq f \leq \varphi + \psi$ und $\int \varphi - \psi) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq \int(\varphi+\psi) = \int(\varphi-\psi) + 2\int\psi$.
$\Rightarrow \overline{\int} f - \underline{\int} f \leq 2\int\psi < \varepsilon$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii):
klar.

Es gelte nun (i) - (iii). Dann ist $\left|\int f - \int \varphi_k\right| = \left|\overline{\int} f - \overline{\int}\varphi_k\right| \leq \overline{\int}|f - \varphi_k| \to 0, k \to \infty$, für jede Folgt $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie in (iii).

□

Korollar 7.7.
$\mathcal{R}_n \subset \mathcal{F}_n$ ist ein linearer Untervektorraum, und $f \mapsto \int f, \mathcal{R}_n \to \mathbb{R}$, ist linear.

Falls $f, g \in \mathcal{R}_n$, so ist $f \cdot g \in \mathcal{R}_n, \max\{f, g\} \in \mathcal{R}_n, \min\{f, g\} \in \mathcal{R}_n$.

Beweis:

(i) Falls $f, g \in \mathcal{R}_n$ und $\overline{\int}|f - \varphi_k| \to 0, \overline{\int}|g - \psi_k| \to 0$. Nach Satz 7.5 folgt $\overline{\int}|(\alpha f + \beta g) - (\alpha\varphi_k + \beta\psi_k)| \to 0, k \to \infty$.
Also ist $\mathcal{R}_n$ ein Vektorraum und $f \mapsto \int f$ linear.

Analog $f \cdot g \in \mathcal{R}_n$.

(ii) Sei $f, g \in \mathcal{R}_n$ und $\overline{\int}|f - \varphi_1| < \varepsilon, \overline{\int}|g - \varphi_2| < \varepsilon$. Dann existieren $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{T}_n$ mit $0 \leq |f - \varphi_1| \leq \psi_1, 0 \leq |g - \varphi_2| \leq \psi_2, \int \psi_1 < \varepsilon, \int \psi_2 < \varepsilon$.
Es folgt $-\psi_1 + \varphi_1 \leq f \leq \psi_1 + \varphi_1, -\psi_2 + \varphi_2 \leq g \leq \psi_2 + \varphi_2$, also $|\max\{f, g\} - \max\{\varphi_1, \varphi_2\}| \leq \psi_1 + \psi_2$.
Somit $\overline{\int}|\max\{f, g\} - \max\{\varphi_1, \varphi_2\}| \leq \int(\psi_1 + \psi_2) < 2\varepsilon$. Damit $\max\{f, g\} \in \mathcal{R}_n$.

Wegen $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$ ist $\min\{f, g\} \in \mathcal{R}_n$.

□

Wir wissen nun, welche Funktionen integrierbar sind. Daraus lesen wir ab, welche Mengen messbar sind:

Definition 7.8.
Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt **(Jordan-)messbar**, falls χ_A integrierbar ist. Setze $\mathbb{M}_n := \{A \subset \mathbb{R}^n | A \text{ ist messbar}\}$. Für $A \in \mathbb{M}_n$ heißt $\mu(A) := \int \chi_A$ der **(Jordan-)Inhalt** von A.

Bemerkung 7.9.

(a) Offensichtlich ist $\mathbb{I}_n \subset \mathbb{A}_n \subset \mathbb{M}_n$, und auf $\mathbb{I}_n$ stimmt μ mit der früheren Definition überein.

(b) $\mathbb{M}_n$ ist ein Mengenring (wegen $\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$ und $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \min\{\chi_A, \chi_B\}$ und Korollar 7.7).

(c) $\mu : \mathbb{M}_n \to \mathbb{R}$ ist Inhalt, d.h. $\mu(A\dot\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (wegen $\mu(A\dot\cup B) = \int \chi_{A\dot\cup B} = \int(\chi_A + \chi_B) = \int \chi_A + \int \chi_B = \mu(A) + \mu(B)$).

Satz 7.10.
Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt: $M \in \mathbb{M}_n \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A, B \in \mathbb{A}_n : A \subset M \subset B, \mu(B\setminus A) < \varepsilon$.

Beweis:

„$\Leftarrow$“ : Es gilt $\chi_A \le \chi_M \le \chi_B$ und $\int(\chi_B - \chi_A) = \mu(B \setminus A) < \varepsilon$.
Also ist $\overline{\int}\chi_M - \underline{\int}\chi_M \le \mu(B \setminus A) < \varepsilon$.

„$\Rightarrow$“ : Zu $\varepsilon > 0$ wähle $h \in \mathcal{T}_n$ mit $\overline{\int}|\chi_M - h| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dazu existiert ein $k \in \mathcal{T}_n$ mit $|\chi_M - h| \le k$, $\int k < \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $H := \left\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \ge \frac{1}{2}\right\}$ und $K : \left\{x \in \mathbb{R}^n : k(x) \ge \frac{1}{2}\right\}$.
Dann gilt $H, K \in \mathbb{A}_n$. Wegen $h - \chi_M \le k$ und $\chi_M \le h + k$ ist $\underbrace{H \setminus K}_{=:A} \subset M \subset \underbrace{H \cup K}_{=:B}$.

Es ist $B \setminus A = (H \cup K) \setminus (H \setminus K) \subset K$ und $\chi_K \le 2k$, also $\mu(K) \le 2\int k < \varepsilon$.

□

Bemerkung 7.11.

(a) Für $A \in \mathbb{A}_n$ ist $\mathring{A}, \overline{A} \in \mathbb{M}_n$ mit $\mu(A) = \mu(\mathring{A}) = \mu(\overline{A})$ ($\mathring{A}$: Inneres von A)
Denn: approximiere
$\prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j] \subset \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j] \subset \prod_{j=1}^{n}(a_j - \varepsilon, b_j]$ bzw.
$\prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j - \varepsilon] \subset \prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j) \subset \prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j]$.

(b) Genauso sieht man, dass man in Satz 7.10 die Menge A bzw. B durch $\mathring{A}$ oder $\overline{A}$ bzw. B° oder $\overline{B}$ ersetzen kann.

Korollar 7.12.
Für $M \in \mathbb{M}_n$ ist $\mu(M) = \sup\{\mu(A) : A \subset M, A \in \mathbb{A}_n\} = \inf\{\mu(B) : B \supset M, B \in \mathbb{A}_n\}$.

Beweis:
Folgt aus 7.10 wegen $\mu(B \setminus M) \le \mu(B \setminus A) < \varepsilon$.

□

Definition 7.13.
Eine Funktion $f \in \mathcal{F}_n$ heißt **Nullfunktion**, falls $\overline{\int}|f| = 0$ ($\Leftrightarrow f \in \mathcal{R}_n$ mit $\int |f| = 0$).

Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, falls N beschränkt ist und χ_N Nullfunktion ist ($\Leftrightarrow N \in \mathbb{M}_n, \mu(N) = 0$).

Lemma 7.14.

(a) *f beschränkt, $f \in \mathcal{F}_n$, supp f Nullmenge $\Rightarrow f$ Nullfunktion;*

(b) *f Nullfunktion $\Rightarrow \ \exists$ Nullmengen $N_k (k \in \mathbb{N})$ mit $\{x : f(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$.*

Beweis:

(a) $|f| \leq C \Rightarrow |f| \leq C \cdot \chi_{\text{supp} f} \Rightarrow \overline{\int}|f| \leq \int C \cdot \chi_{\text{supp} f} = C \int \chi_{\text{supp} f} = C\mu(\text{supp} f) = 0$.

(b) $N_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$. Dann ist $\{x : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$.
$\chi_{N_k} \leq k|f| \Rightarrow \overline{\int}\chi_{N_k} \leq \overline{\int}k|f| = k\overline{\int}|f| = 0$.

□

Satz 7.15.
Für $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt: $M \in \mathbb{M}_n \Leftrightarrow M$ ist beschränkt und ∂M (Rand von M) ist Nullmenge.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ : leicht (Übung).

„$\Leftarrow$“ : Wähle $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_n$ mit $\varphi \geq \chi_M$ (M beschränkt), $\psi \geq \chi_{\partial M}$, $\int \psi < \varepsilon$.

O.E. sei $\varphi = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $\alpha_j \in \{0, 1\}$ (sonst ersetze φ durch $\chi_{\{x:\varphi(x) \geq 1\}}$).
O.E. sei $\psi = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{A_j}$ mit $\beta_j \in \{0, 1\}$ (d.h. Darstellung mit den gleichen Intervallen).
O.E. sei $\alpha_j = 0$ falls $A_j \cap M = \emptyset$ (Weglassen überflüssiger Intervalle).
Für $\widetilde{\psi} := \varphi - \psi$ gilt $\widetilde{\psi} = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \chi_{A_j}$ mit $\gamma_j \leq 0$ falls $A \cap M = \emptyset$ ($\Rightarrow \alpha_j = 0$) oder falls

$A_j \cap \partial M \neq \emptyset$ $(\beta_j = 1)$.
Damit $\widetilde{\psi} \leq \chi_M \leq \varphi$.
Es gilt $\int(\varphi - \widetilde{\psi}) = \int \psi < \varepsilon$.
Also ist $\chi_M \in \mathcal{R}_n$, d.h. $M \in \mathbb{M}_n$.

□

Satz 7.16.
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ $(x \neq M)$.
Sei f beschränkt und $f|_M$ stetig. Dann ist f integrierbar.

Beweis:
Sei $\varepsilon > 0$, $|f| \leq C$. Während nach Bemerkung 7.10 b) $A, B \in \mathbb{A}_n$ mit $\overline{A} \subset M \subset B^\circ, \mu(B \setminus \overline{A}) < \frac{\varepsilon}{C}$. Dann ist $\int |f - f \cdot \chi_{\overline{A}}| \leq C \cdot \mu(B^\circ \setminus \overline{A}) < \varepsilon$.

(i) Wir zeigen $f \cdot \chi_{\overline{A}} \in \mathcal{R}_n$. O.E. sei $\mu(\overline{A}) > 0$.
Da $\overline{A}$ kompakt ist, ist $f \cdot \chi_{\overline{A}}$ gleichmäßig stetig. Zu $\eta > 0$ wähle $\delta > 0$ mit:
$\forall\ x, y \in \overline{A}, \|x - y\|_\infty < \delta \cdot |f(x) - f(y)| < \frac{\eta}{\mu(\overline{A})}$.

Zerlege $A = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} A_j$ mit $A_j \in \mathbb{A}_n$, diam $A_j := \sup\limits_{x,y \in A_j} \|x - y\|_\infty < \delta$.

Wähle $\alpha_j \in f(A_j)$. Dann ist $h := \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j} \in \mathcal{T}_n$ mit $|f(x) - h(x)| \leq \frac{\eta}{\mu(\overline{A})}$ für $x \in \overline{A}$.
Damit gilt $\overline{\int}|h - f| \leq \sup\limits_{x \in \overline{A}} |h(x) - f(x)| \cdot \mu(\overline{A}) \leq \frac{\eta}{\mu(\overline{A})} \cdot \mu(\overline{A}) = \eta$.

(ii) Nach (i) ist $f \cdot \chi_{\overline{A}} \in \mathcal{R}_n$, d.h. es existiert ein $\varphi \in \mathcal{T}_n$ mit $\overline{\int}|f \cdot \chi_{\overline{A}} - \varphi| < \varepsilon$. Somit
$$\overline{\int}|f - \varphi| \leq \underbrace{\overline{\int}|f - f \cdot \chi_{\overline{A}}|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\overline{\int}|f \cdot \chi_{\overline{A}} - \varphi|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon, \text{ d.h. } f \in \mathcal{R}_n.$$

□

Definition 7.17 (induktive Definition)**.**
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Normalbereich**, falls:

(i) $n = 1$: $M = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$;

(ii) $n > 1$: es existiert ein Normalbereich $N \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $\varphi, \psi : N \to \mathbb{R}$, φ, ψ stetig, mit $M = \{x \in \mathbb{R}^n | y := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in N, x_n \in [\varphi(y), \psi(y)]\}$.

Beispiel 7.18.
$\overline{B_r(0)} := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3, r > 0$ ist Normalbereich.
$N_1 := [-r, r]$
$N_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in [-r, r], x_2 \in [-\sqrt{r^2 - x_1^2}, \sqrt{r^2 - x_1^2}]\}$
$N_3 := \overline{B_r(0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in N_2, x_3 \in [-\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}]\}.$

Satz 7.19.
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich. Dann ist M kompakt und messbar.

Beweis:
Seien N, φ, ψ wie in Definition 7.17. Wir zeigen jeweils induktiv, wobei der Induktionsanfang jeweils klar ist.

(i) M abgeschlossen:
Da N nach Induktionsvoraussetzung abgeschlossen ist ist, $\widetilde{M} := N \times \mathbb{R}$ abgeschlossen (betrachte konvergente Folgen in $\widetilde{M}$).
$M = \{x \in \widetilde{M} : x_n - \varphi(y) \in [0, \infty), \psi - x_n \in [0, \infty)\} \subset \widetilde{M}$. Also ist M abgeschlossen als Teilmenge von $\widetilde{M}$, also auch in $\mathbb{R}^n$.

(ii) M ist beschränkt (und damit mit (i) kompakt):
Da N kompakt ist (nach Induktionsvoraussetzung) und φ, ψ stetig, existiert $C > 0$ mit $|\varphi(y)| \leq C, |\psi(y)| \leq C$ $(y \in N)$. Also $M \subset N \times [-C, C]$ beschränkt.

(iii) $M \in \mathbb{M}_n$:
Da $N \in \mathbb{M}_{n-1}$, existieren $A, B \in \mathbb{A}_{n-1}$ mit $A \subset N \subset B$ und $\mu_{n-1}(B \setminus A) < \varepsilon$. Da $\varphi, \psi : N \to \mathbb{R}$ stetig, existieren $\varphi_{1,2}, \psi_{1,2} \in \mathcal{T}_{n-1}$ mit $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2$, $\sup\limits_{x \in \overline{A}} |(\varphi_2 - \varphi_1)(x)| \leq \varepsilon, \sup\limits_{x \in \overline{A}} |(\psi_2 - \psi_1)(x)| \leq \varepsilon$.
(Vgl. Beweis von Satz 7.16)

O.E. sei $\varphi_{1,2} = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j^{1,2} \chi_{A_j}$ und $\psi_{1,2} = \sum\limits_{j=1}^{k} \beta_j^{1,2} \chi_{A_j}$ (gleiche Partition).
Sei $M \subset [-C, C]^n$ (da nach (ii) beschränkt). Dann folgt $M \subset M_1 := \bigcup_{j=1}^{k} A_j \times [\alpha_j^1, \beta_j^2] \cup (B \setminus A \times [-c, c])$ (unterste und oberste der vier Treppenfunktionen und Streifen mit $B \setminus A$)
$M \supset M_2 := \bigcup_{j=1}^{k} A_j \times [\alpha_j^2, \beta_j^2]$ (die beiden mittleren Treppenfunktionen).
Und es folgt $\mu(M_1 \setminus M_2) \leq 2\mu_{n-1}(A) \cdot \varepsilon + \underbrace{\mu_{n-1}(B \setminus A)}_{<\varepsilon} \cdot 2c < 2(\mu_{n-1}(A) + c) \cdot \varepsilon$.

Wegen $M_1, M_2 \in \mathbb{A}_n$ und ε beliebig, folgt $M \in \mathbb{M}_n$.

□

8. Sätze zur Integration

a. Der Satz von Fubini

Definition 8.1.
Sei $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}, B \subset D$. Dann heißt f **integrierbar über** B, falls $f \cdot \chi_B \in \mathcal{R}_n$.
In diesem Fall setze $\int\limits_B f(x)\,dx := \int\limits_B f := \int f \cdot \chi_B$.

Die Berechnung von Integralen erfolgt fast immer in Form von iterierten Integralen.

Beispiel 8.2.
$M := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0,2], x_2 \in [0, x_1^2]\}$.

$$\int\limits_M |x|^2\,dx = \int\limits_M (x_1^2 + x_2^2)\,dx \underbrace{=}_{(*)} \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^{x_1^2} (x_1^2 + x_2^2)\,dx_2\right] dx_1$$

$$= \int\limits_0^2 (x_1^2 x_1^2 + \tfrac{x_2^3}{3}\Big|_{x_2=0}^{x_2=x_1^2})\,dx_1 = \tfrac{x_1^5}{5}\Big|_0^2 + \tfrac{x_1^7}{3\cdot 7}\Big|_0^2 = \tfrac{2^5}{5} + \tfrac{2^7}{3\cdot 7}.$$

Frage: Ist (*) erlaubt? Die Antwort gibt der Satz von Fubini.
Allgemein: sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (y,z)$ mit $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l, z := \begin{pmatrix} x_{l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k, l+k = n$.

Bemerkung 8.3.

(a) Sei $f \in \mathcal{T}_n$. Dann ist $f(y,\cdot) \in \mathcal{T}_k$ für jedes feste y, und für $\widetilde{f}(y) := \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dz \in \mathcal{T}_l$ gilt $\int\limits_{\mathbb{R}^l} \widetilde{f}(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f$.
(denn es genügt, $f = \chi_A$ mit $A \in \mathbb{I}_n$ zu betrachten)

(b) Sei $f \in \mathcal{F}_n$ (d.h. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\operatorname{supp} f$ kompakt) mit $\overline{\int}|f| < \infty$.
Für $y \in \mathbb{R}^l$ sei $\widetilde{f}(y) := \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^k}} |f(y,z)|\,dz$. Dann ist $\widetilde{f} \in \mathcal{F}_l$ mit $\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^l}} \widetilde{f}(y)\,dy \leq \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n}} |f(x)|\,dx$.
Denn sei $|f| \leq h \in \mathcal{T}_n$. Dann ist $\widetilde{f} = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^k}} |f(y,z)|\,dz \leq \int\limits_{\mathbb{R}^k} \overset{h}{}(y,z)\,dz = \widetilde{h}(y)$.

Damit $\int\limits_{\mathbb{R}^l} \widetilde{f}(y)\,dy \leq \int\limits_{\mathbb{R}^l} \widetilde{h}(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx$.

Da $h \geq |f|$ beliebig in $\mathcal{T}_n$ war, folgt $\int\limits_{\mathbb{R}^l} \widetilde{f}(y)\,dy \leq \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n}} |f(x)|\,dx$.

Satz 8.4 (Satz von Fubini für Riemann-Integrale)**.**
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Riemann-)integrierbar. Dann gilt:

(a) *Für $I(y) := \inf\{\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^k}} |f(y,z) - h(z)|\,dz : h \in \mathcal{T}_k\}$ gilt:*
$\int\limits_{\mathbb{R}^l} |I(y)|\,dy = 0.$

(b) *Es existieren Nullmengen $N_j \subset \mathbb{R}^l$ mit $f(y,\cdot) \in \mathcal{R}_k$ für $y \in \mathbb{R}^l \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$.*

(c) *Setze* $g(y) := \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dz & \text{, falls } f(y,\cdot) \in \mathcal{R}_k \\ \int\limits_{\mathbb{R}^k} hy(z)\,dz & \text{, wobei } hy \in \mathcal{T}_k \text{ mit } \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^k}} |f(y,\cdot) - hy| < 2I(y). \end{cases}$

Dann ist $g \in \mathcal{R}_l$ und $\int\limits_{\mathbb{R}^l} g(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$.

Korollar 8.5.
Sei $f \in \mathcal{R}_n$ und für alle $y \in \mathbb{R}^l$ sei $f(y,\cdot) \in \mathcal{R}_k$. Dann gilt:

$$\boxed{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y,z)\,d(y,z) = \int\limits_{\mathbb{R}^l} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dz \right) dy.}$$

Beweis: (von Satz 8.4)

(a) Wähle $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_n$ mit $\overline{\int} |f - \varphi_m| \to 0$ $(m \to \infty)$.

Dann ist $I(y) \leq \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^k}} |f(y,\cdot) - \varphi(y,\cdot)| =: \widetilde{f - \varphi_m}(y)$ (siehe 8.3 (b)).

Damit $\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^l}} I(y) \leq \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n}} \widetilde{f - \varphi_m} \leq \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n}} |f - \varphi_m| \to 0$. Also $\overline{\int\limits_{\mathbb{R}^l}} |I(y)|\,dy = 0$.

(b) Wegen $f(y,\cdot) \in \mathcal{R}_k \Leftrightarrow I(y) = 0$, folgt (b) aus Lemma 7.14.

(c) Sei $(\varphi_m)_m$ wie in (a). Dann ist

$$\left|\int_{\mathbb{R}^k} \varphi_m(y,z)\,dz - g(y)\right| \leq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} |\varphi_m(y,z) - f(y,z)|\,dz & \text{, falls } I(y) = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^k} |\varphi_m(y,z) - hy(z)|\,dz & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Es ist $\int_{\mathbb{R}^k} |\varphi_m(y,z) - hy(z)|\,dz \leq \underbrace{\overline{\int_{\mathbb{R}^n}} |\varphi_m(y,z) - f(y,z)|\,dz}_{=\widetilde{\varphi_m - f}(y)} + \underbrace{\overline{\int_{\mathbb{R}^k}} |f(y,z) - hy(z)|\,dz}_{<2I(y) \leq 2\widetilde{\varphi_m - f}(y)} \leq$
$3\widetilde{\varphi_m - f}(y)$.

Damit $\overline{\int_{\mathbb{R}^l}} |\int_{\mathbb{R}^k} \varphi_m(y,z)\,dz - g(y)|\,dy \leq 3 \cdot \overline{\int_{\mathbb{R}^l}} \widetilde{\varphi_m - f}(y)\,dy \leq \overline{\int_{\mathbb{R}^n}} |\varphi_m - f| \to 0 \; (m \to \infty)$.

Also ist $g \in \mathcal{R}_l$ und $\int_{\mathbb{R}^l} g(y)\,dy = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} \varphi_m(y,z)\,dz \right) dy = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m = \int_{\mathbb{R}^n} f$.

□

KOROLLAR 8.6 (Integration über Normalbereiche).
Sei $M \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, ein Normalbereich.
Seien N, φ, ψ wie in Definition 7.16. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} f \subset M$, $f|_M$ stetig.
Dann gilt mit $y := (x_1, \ldots, x_{n-1})$:

$$\boxed{\int_M f(x)\,dx = \int_N \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(y, x_n)\,dx_n \right] dy}$$

BEWEIS:
Nach Satz 7.15 und Satz 7.18 ist f integrierbar. Für $y \in N$ ist $f(y,\cdot) \in \mathcal{R}_1$, da $\operatorname{supp} f(y,\cdot) \subset [\varphi(y), \psi(y)]$ und $f(y,\cdot)|_{[\varphi(y),\psi(y)]}$ stetig. Für $y \notin N$ ist $f(y,\cdot) \equiv 0$ und damit $f(y,\cdot) \in \mathcal{R}_1$.

Damit folgt die Behauptung aus dem Korollar 8.5.

□

BEISPIEL 8.7 (Trägheitsmoment einer Kugel bezüglich der z-Achse).
Betrachte die Kugel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| \leq r\}$

Zu berechnen ist $\int\limits_K (x^2 + y^2)\, d(x, y, z)$.

Es ist $\int\limits_K x^2\, d(x, y, z) = \int\limits_{-r}^{r} \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} x^2\, dz\, dy\, dx$

$= 8 \cdot \int\limits_0^r \int\limits_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} x^2\, dz\, dy\, dx$

$= 8 \cdot \int\limits_0^r \int\limits_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$

(Substitution $y = \sqrt{r^2 - x^2} \sin t,\ dy = \sqrt{r^2 - x^2} \cos t\, dt$)

$= 8 \cdot \int\limits_0^r x^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - x^2}\, \sqrt{1 - \sin^2 t}\, \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \cos t\, dt\, dx$

$$= 8 \cdot \int\limits_0^r x^2(r^2 - x^2) \underbrace{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt}_{=\frac{\pi}{4} \text{ (aus Gerechtigkeitsgründen ;-)}} dx$$

$= 8\frac{\pi}{4} \int\limits_0^r (x^2 r^2 - x^4)\, dx = 8\frac{\pi}{4} \left(\frac{r^5}{3} - \frac{r^5}{5}\right) = \frac{8}{30}\pi r^5.$

Wegen $\int\limits_K x^2 d(x, y, z) = \int\limits_K y^2\, d(x, y, z)$ ist das Trägheitsmoment gleich $\frac{8}{15}\pi r^5$.

Satz 8.8 (Prinzip von Cavalieri)**.**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ sei der Schnitt $M_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, y) \in M\}$ messbar.
Dann ist

$$\boxed{\mu_n(M) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(M_x)\, dx.}$$

Beachte dabei, dass M messbar und damit beschränkt ist. Also ist $\mu_{n-1}(M_x) = \mu_{n-1}(\emptyset) = 0$ für $|x| \geq C$ mit einer Konstanten C.

Beweis:
Das ist Korollar 8.5 für die Funktion χ_M.

□

Beispiel 8.9.

(a) Kreisfläche: $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq r\} = \{(x,y) : x \in [-r,r], y \in [-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}]\}$.
$\mu_2(M) = \int\limits_{-r}^{r} \mu_1([-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}])\,dx = 4\int\limits_{0}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx$
(Substitution: $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\,dt$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$)
$= 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,dt = 4r^2\frac{\pi}{4}$. Also $\mu_2(M) = \pi r^2$.

(b) Volumen der Kugel: Sei nun $\mathbb{R}^3 \supset M := \overline{K_r(0)} = \{(x,y,z) : \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| \leq r\}$.
Für $x \in [-r,r]$ ist $M_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq r^2 - x^2\}$, also $\mu_2(M_x) = \pi(r^2 - x^2)$ nach (a).
Damit ist $\mu_3(M) = \int\limits_{-r}^{r} \mu_2(M_x)\,dx = \int\limits_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)\,dx = 2\pi(r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

b. Der Transformationssatz

Wir wissen jetzt, wie Integrale berechnet werden und Mengeninhalte gemessen werden. Aber eine Frage bleibt:
wie verhält sich das Integral bei Abbildungen?

Vergleiche die Substitutionsregel im $\mathbb{R}^1$:
$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(z))\varphi'(z)\,dz$

Satz: (Vergleiche Satz 7.10)
*$\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ A \in \mathbb{M}_n\ \exists\ M_\varepsilon, M^\varepsilon \in \mathbb{A}_n$, disjunkte Vereinigung von **Würfeln**:*
$M_\varepsilon \subset M \subset M^\varepsilon$, $\mu(M^\varepsilon \setminus M_\varepsilon) < \varepsilon$.

Beweis:
Wegen Satz 7.10 genügt es, $M = \prod\limits_{i=1}^n (0, a_i], a_i > 0$ zu betrachten.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $q_i, Q_i \in \mathbb{Q}$ mit $0 < q_i < a_i < Q_i$ und $Q_i - q_i < \varepsilon$ (ε klein).
$\Rightarrow M_\varepsilon := \prod\limits_{i=1}^n (0, q_i] \subset M \subset M^\varepsilon := \prod\limits_{i=1}^n (0, Q_i]$ und $\mu(M^\varepsilon \setminus M_\varepsilon) = \mu(M^\varepsilon) - \mu(M_\varepsilon) =$
$\prod\limits_{i=1}^n Q_i - \prod\limits_{i=1}^n q_i < \prod\limits_{i=1}^n (a_i + \varepsilon) - \prod\limits_{i=1}^n (a_i - \varepsilon)$
$=: \varepsilon P_a(\varepsilon) < C_a \cdot \varepsilon$ (für $\varepsilon < \min\{1_i : i = 1, \ldots, n\}$)

Außerdem sind $M_\varepsilon, M^\varepsilon$ disjunkte Vereinigung von Würfeln (da $q_i, Q_i \in \mathbb{Q}$)

□

Satz 8.10.
Sei $M \in \mathbb{M}_n$, f integrierbar über M. Dann ist graph $f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis:
$M, f|_M$ beschränkt, es gibt also $C > 0 : M \subset [-C, C]^n, |f|_M| \leq C$.
Sei $\varepsilon > 0$, wähle $A \in \mathbb{A}_n$ $(A \subset M)$ mit $\mu(M \setminus A) < \frac{\varepsilon}{C}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_n$: $\varphi \leq f|_A \leq \psi$ mit $\int\limits_A \psi - \varphi < \varepsilon$.
Dann folgt:
$\overline{\int} \chi_{\text{graph } f|_A} \leq \int\limits_A \psi - \varphi < \varepsilon$ und so $\overline{\int} \chi_{\text{graph } f|_M} < \varepsilon + C\frac{\varepsilon}{C} = 2\varepsilon$

□

LEMMA 8.11.
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, d.h. $\forall\ x, y \in M$: $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty$.
Dann gilt $\overline{\int}\chi_{f(M)} \leq L^n \overline{\int}\chi_M$.
Insbesondere werde Nullmengen auf Nullmengen abgebildet.

BEWEIS:
Sei $B_\infty(m, \frac{a}{2})$ der Würfel mit Mittelpunkt m und Kantenlänge a.
$\Rightarrow f(B_\infty(m, \frac{a}{2})) \subset B_\infty(f(m), L \cdot \frac{a}{2})$.
$\Rightarrow \overline{\int}\chi_{f(B_\infty(m,\frac{a}{2}))} \leq L^n a^n = L^n \overline{\int}\chi_{B_\infty(m,\frac{a}{2})}$.

□

LEMMA 8.12.
Sei $G \in \mathbb{M}_n$ offen, $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig, $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ mit $\det f'(x) \neq 0\ \forall\ x \in G$.
Dann gelten:

(a) $H := f(G)$ ist offen, $H \in \mathbb{M}_n, \overline{H} = f(\overline{G}), \partial H \subset f(\partial G)$;

(b) Falls f injektiv ist, dann gilt $\partial H = f(\partial G)$;

(c) $A \in \mathbb{M}_n, A \subset G \Rightarrow f(A) \in \mathbb{M}_n$.

BEWEIS:

(a) Nach Satz über lokale Umkehrbarkeit ist $f(G) = H$ offen.
$f(\overline{G})$ kompakt, denn $\overline{G}$ kompakt (beschränkt und abgeschlossen) und f stetig.
$\Rightarrow \overline{H} \subset \overline{f(\overline{G})} = f(\overline{G})$, also $\partial H = \overline{H} \setminus H \subset f(\overline{G} \setminus G) = f(\partial G)$
Wegen $G \in \mathbb{M}_n$, folgt $\mu(\partial G) = 0 \Rightarrow \mu(\partial H) \leq \mu(f(\partial G)) = 0$
Weil zusätzlich H beschränkt: (Satz 7.15) $H \in \mathbb{M}_n$.
Sei $y \in f(\overline{G})$, $y = f(x)$ und $x \in \overline{G}$ und $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k, x_k \in G$.
$H \ni y_k = f(x_k) \to f(x) = y \Rightarrow y \in \overline{H}$ (da f stetig).

(b) Annahme: $f(\partial G) \setminus \partial H \neq \emptyset$.
Sei $y \in f(\partial G) \setminus \partial H$
$\Rightarrow\ \exists\ \overline{x} \in \overline{G} \setminus G$: $f(\overline{x}) = y \wedge y \in H$, $\exists\ x \in G$: $f(x) = y$. $\Rightarrow$ Widerspruch zu f injektiv.

(c) Sei $A \subset \overline{G}$, $A \in \mathbb{M}_n$, dann $\mathring{A} \in \mathbb{M}_n$ und damit nach (a) $f(\mathring{A}) \in \mathbb{M}_n$.
Wegen $A \setminus \mathring{A} \subset \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A$ folgt $\mu(f(A \setminus \mathring{A})) \leq \mu(f(\partial A)) = 0$
$\Rightarrow f(A) = f(\mathring{A}) \cup f(A \setminus \mathring{A}) \in \mathbb{M}_n$.

$\square$

Satz 8.13.
Seien $H \in \mathbb{M}_n$ offen, $\Phi \in C^1(\overline{H}; \mathbb{R}^n)$ mit $\Phi|_H : H \to G$ Diffeomorphismus. Falls $f \in C(\overline{G}; \mathbb{R})$, so ist $z \mapsto f(\Phi(z)) \cdot |\det \Phi'(z)|$ auf $\overline{H}$ integrierbar mit

$$\boxed{\int_{\overline{G}} f(x)\, dx = \int_{\overline{H}} f(\Phi(z)) |\det \Phi'(z)|\, dz}$$

$C^1(\overline{H}) := \{f : \overline{H} \to \mathbb{R} \mid \exists\, U \supset \overline{H}, U \text{ offen}, \widetilde{f} \in C^1(U) : \widetilde{f}|_{\overline{H}} = f\}$.

Beispiel 8.14 (Polarkoordinaten).
$\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Bekannt: $|\det \Phi'(r, \varphi)| = r$
Gesucht: $\mu(K), K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq r\}$

Sei $G := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r, x \notin [0, \infty) \times \{0\}\}$ $H := (0, r) \times (0, 2\pi)$, $f = 1$.
$\mu(K) = \int_{\overline{G}} f\, dx = \int_{\overline{H}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi\, dr$
$= \int_0^r \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dr = 2\pi \frac{1}{2} r^2 = \pi r^2$.

Beispiel 8.15.
$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2 - x_2^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (-2r) e^{-r^2}\, d\varphi\, dr$
$= 2\pi(-\frac{1}{2} e^{-r^2})|_0^\infty = \pi$.

$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2 - x_2^2}\, dx_1\, dx_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt\right)^2$
$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.

Insbesondere: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1$.

9. Kurvenintegrale

Sei Γ eine orientierte Kurve im $\mathbb{R}^n$, und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei ein Repräsentant von Γ. Dann ist $\mathcal{R}(\Gamma) := \mathcal{R}(\gamma)$ der Wertebereich von Γ (hängt nicht von der Wahl von γ ab.

Aus Kapitel 6: Die Länge von Γ ist $L(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b 1 \cdot |\gamma'(t)|\, dt$.

Statt 1 können wir auch andere stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einsetzen, also

$$\int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt$$

(Verallgemeinerung des Integrals in $\mathbb{R}$).

In Theorie und Anwendung sind aber andere Integrale interessanter:

1. Anwendung (aus der Physik):
   Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. (in der Physik heißen solche Abbildungen *Vektorfelder*).
   Man kann sie sich veranschaulichen, indem man sich das Bild $F(x)$ von einem Punkt $x \in U$ als „Pfeilchenvektor“ vorstellt, und diesen in x anheftet.
   Ist $\mathcal{R}(\Gamma) \subseteq I$, dann können wir das Kurvenintegral

   $$\int_\Gamma \langle F(x),\, dx\rangle := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt$$

   (die Definition hängt nicht von der Wahl von γ ab - später)
   Ist F ein Kraftfeld, dann ist $\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt$.

2. Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:
   Wie kann eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aussehen? (geht nicht für alle f)

   In $\mathbb{R}$:
   $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   Mittelwertsatz: $\exists\ \xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.
   Hauptsatz: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$

   In $\mathbb{R}^n$:
   $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ glatt, $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$.

Mittelwertsatz (Bemerkung 3.2): $\exists\, \theta \in (0,1)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)$.
Hauptsatz: $f(b) - f(a)? =? \int\limits_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int\limits_0^1 \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\; dt.$

Definition 9.1.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt **0-Form** in U, eine stetige Abbildung $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,h) \mapsto \omega(x,h)$ heißt **1-Form** in U, falls ω im zweiten Argument linear ist.

Man spricht auch von Pfaffschen Formen, oder Differentialformen 1. Ordnung.

Beispiele 9.2.

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x,h) \mapsto \langle F(x), h\rangle$ eine 1-Form in u.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Dann ist $df : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x,h) \mapsto \langle \nabla f(x), h\rangle = f'(x) \cdot h = f'(x,h)$ eine 1-Form in U. Sie heißt **totales Differential** von f in U.

Bezeichnung 9.3.
Zu $i = 1, \ldots, n$ definieren wir $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h \mapsto h_i$ (Projektion auf die i-te Komponente).
Sei ω eine 1-Form in U. Wir setzen $\omega_i(x) := \omega(x, e_i)$, damit ist $\omega(x,h) = \sum\limits_{i=1}^n \omega(x,e_i)h_i = \sum\limits_{i=1}^n \omega_i(x)\,dx_i(h) = \langle \omega(x),\, dx(h)\rangle$ mit $\omega(x) = \begin{pmatrix} \omega_1(x) \\ \vdots \\ \omega_n(x) \end{pmatrix}$, $dx(h) = \begin{pmatrix} dx_1(h) \\ \vdots \\ dx_n(h) \end{pmatrix}$.
Speziell für $f \in C^1(U;\mathbb{R})$:
$df(x,h) = \langle \nabla f(x), h\rangle = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot h_i = \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,dx_i(h)$. Kurz: $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i$.

Definition 9.4.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei Γ eine orientierte glatte Kurve in U, sei $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma : [a,b] \to U$ und ω eine 1-Form in U.
Dann heißt $\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))\,dt$ das **Kurvenintegral** von ω längs Γ. Analog für stückweise glatte Kurven.

Bemerkung 9.5.

1. $\int\limits_\Gamma \omega$ ist wohldefiniert: seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to U, \gamma_2 : [a_2, b_2] \to U$ Repräsentanten von Γ. Dann gibt es ein $\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ mit $\varphi'(x) < 0$ (für alle $x \in [a_2, b_2]$) und $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.
   Es gilt:
   $$\int\limits_{a_1}^{b_1} \omega(\gamma_1(t), \gamma_1'(t))\, dt = \int\limits_{a_2}^{b_2} \omega(\gamma_1(\varphi(s)), \gamma_1'(\varphi(s)))\varphi'(s)\, ds \qquad \text{(Substitution } t = \varphi(s)\text{)}$$
   $$= \int\limits_{a_2}^{b_2} \omega(\gamma_2(s), \underbrace{\gamma_1'(\varphi(s))\varphi'(s))}_{(\gamma_1 \circ \varphi)'(s) = \gamma_2'(s)}\, ds \qquad (\omega \text{ linear im zweiten Argument})$$

2. Sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, h) \mapsto \langle F(x), h \rangle$.
   Dann ist $\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt$.

3. Offensichtlich gilt für $\omega_1, \omega_2, \omega$ 1-Formen, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ orientierte glatte Kurven, $c \in \mathbb{R}$:
   $\int\limits_\Gamma (\omega_1 + \omega_2) = \int\limits_\Gamma \omega_1 + \int \Gamma\omega_2$
   $\int\limits_\Gamma c \cdot \omega = c \cdot \int\limits_\Gamma \omega$
   $\int\limits_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \omega = \int\limits_{\Gamma_1} \omega + \int\limits_{\Gamma_2}$
   $\int\limits_{-\Gamma} \omega = -\int\limits_\Gamma \omega$, wobei $-\Gamma$ die umgekehrt durchlaufene Kurve ist.

Beispiele 9.6.

1. Sei $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \gamma_2 : [\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $\Gamma_1 = [\gamma_1], \Gamma_2 = [\gamma_2]$.
   Sei $v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$
   und $\omega : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, h) \mapsto \langle v(x), h \rangle$.
   Dann ist $\int\limits_{\Gamma_1} \omega = \int\limits_0^\pi \left\langle \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$. Ebenso für $\int\limits_{\Gamma_2} \omega = 0$.

   Für den geschlossenen Weg $\Gamma_1 + \Gamma_2$ ist also $\int\limits_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \omega = 0$

2. Seien Γ_1, Γ_2 wie in (a), sei $\widetilde{v} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \widetilde{\omega}(x, h) = \langle \widetilde{v}(x), h \rangle$
   $$\int\limits_{\Gamma_1} \widetilde{(\omega)} = \int\limits_0^\pi \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int\limits_0^\pi 1\, dt = \pi.$$

Ebenso: $\int\limits_{\Gamma_2} \widetilde{\omega} = \pi$, $\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} \widetilde{\omega} = 2\pi$.

$\int\limits_{-\Gamma_2} \widetilde{\omega} = -\pi \neq \pi = \int\limits_{\Gamma_1} \widetilde{\omega}$ (Anfangs- und Endpunkt sind gleich!)

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U;\mathbb{R})$ und $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine 1-Form mit $\omega = df$, d.h. $\omega(x,h) = f'(x)h = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i f(x) \cdot h_i$.
   Sei Γ eine Kurve in U mit Repräsentanten $\gamma : [a,b] \to U$. Dann ist
   $\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))\, dt = \int\limits_a^b \underbrace{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}_{=(f\circ\gamma)'(t)}\, dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.
   Also hängt $\int\limits_{\Gamma} \omega$ nur von Anfangs- und Endpunkt von Γ ab, aber nicht vom Verlauf von Γ.

Definition 9.7.
Eine 1-Form $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **exakt**, falls es ein $f \in C^1(U;\mathbb{R})$ gibt mit $\omega = df$. In diesem Fall heißt f **Stammfunktion zu** ω.

Eine 1-Form $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt **wegunabhängig**, wenn $\int\limits_{\Gamma_1} \omega = \int\limits_{\Gamma_2} \omega$ für alle stückweise glatten Kurven Γ_1, Γ_2 in U mit dem selben Anfangs- und Endpunkt ist.

Satz 9.8.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Eine 1-Form auf U ist genau dann exakt, wenn sie wegunabhängig ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ : Beispiel 9.6 (c).

„$\Leftarrow$“ : Sei $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine wegunabhängige 1-Form. Sei $x_0 \in U$. Weil U offen und zusammenhängend ist, können wir für jedes $x \in U$ eine in U verlaufende stückweise glatte Kurve $\Gamma(x_0, x)$ finden, die x_0 mit x verbindet (Übung).
Sei $f : U \to \mathbb{R}, x \mapsto \int\limits_{\Gamma(x_0,x)} \omega$.

Wir zeigen $f \in C^1(U;\mathbb{R})$.
Sei $x \in U$, sei $B \subseteq U$ eine offene Kugel um x, sei $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + h \in B$.
Sei Γ die Strecke von x nach $x + h$ (liegt in B, da Kugeln konvex sind).

$f(x+h) - f(x) = \int\limits_{\Gamma(x_0,x+h)} \omega - \int\limits_{\Gamma(x_0,x)} \omega = \int\limits_{\Gamma(x_0,x+h)} \omega + \int\limits_{-\Gamma(x_0,x)} \omega = \int\limits_{-\Gamma(x_0,x)+\Gamma(x_0,x+h)} \omega$

$= \int\limits_{\Gamma} \omega$ (da ω wegunabhängig ist)

$= \int\limits_0^1 \omega(\underbrace{x+th}_{\gamma_h(t)}, \underbrace{h}_{\gamma_h'(t)})\,dt$ $\quad \gamma_h : [0,1] \to U, t \mapsto x + th$

$= \int\limits_0^1 g_h(t)\,dt$ $\quad g_h(t) = \omega(\gamma_h(t), \gamma_h'(t))$

$= g_h(\theta_h)(1-0)$ (für ein $\theta_h \in (0,1)$ nach Mittelwertsatz d. Integralrechnung)

$= \omega(x+\theta_h h, h) = \omega(x,h) + r(x,h)\cdot|h|$ mit $r(x,h) := \begin{cases} \frac{1}{|h|}\cdot(\omega(x+\theta_h\cdot h, h) - \omega(x,h)) & h \neq 0 \\ 0 & h = 0 \end{cases}$

Weil ω linear im zweiten Argument ist, gilt $|r(x,h)| = |\omega(x+\theta_h h, \frac{h}{|h|}) - \omega(x, \frac{h}{|h|})| < \varepsilon$, falls $|\theta_h h| \le |h| < \delta$ (ω stetig).
Also ist $r(x,\cdot)$ in 0 stetig. Also ist f differenzierbar mit $\underbrace{f'(x)h}_{df(x,h)} = \omega(x,h)$.

Wegen $f'(x)h = \omega(x,h)$ und ω stetig ist f' stetig.

□

Beispiel 9.9.

1. Für $\omega : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x,h) \mapsto \left\langle \frac{x}{|x|^2}, h \right\rangle$ ist $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \ln|x|$ eine Stammfunktion, d.h. ω ist exakt.
2. Dagegen ist $\widetilde{\omega} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,h) \mapsto \left\langle \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, h \right\rangle$ nicht exakt, weil wegabhängig (siehe 9.6).

Bemerkung 9.10.
Sei $\omega : U \times R^n \to \mathbb{R}$ exakt, also $\omega = df$ für ein $f \in C^1(U;\mathbb{R})$. Wir haben also:
$\omega(x,h) = \sum\limits_{i=1}^n \underbrace{\omega_i(x)}_{\omega(x,e_i)} \cdot h_i = \sum\limits_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i$.
Folglich (Eindeutigkeit der Darstellung)
$\omega_i(x) = \partial_i f(x)$ für $x \in U$.
Falls $\omega \in C^1(U \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ ist, gilt
$\partial_j \omega_i(x) = (\partial_j(\partial_i f))(x) = (\partial_i(\partial_j f))(x) = \partial_i \omega_j(x), x \in U$.

Für exakte 1-Formen gilt also $\partial_j\omega_i = \partial_i\omega_j$ ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$), falls ω stetig differenzierbar ist.

Hinreichend ist das aber nicht:
für $\widetilde{\omega}$ wie in 9.6 (b) ist $\widetilde{\omega_1}(x) = \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \widetilde{\omega_2}(x) = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$
Somit: $\partial_2\widetilde{\omega_1}(x) = \frac{-(x_1^2+x_2^2)-(-x_2)2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = \ldots = \partial_1\widetilde{\omega_2}(x)$.

Dies liegt daran, dass Kurven um 0 herumlaufen können. Z.B. für $U : \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_2 > 0\}$ ist $\widetilde{\omega}|_{U\times\mathbb{R}^n}$ exakt (siehe unten).

Definition 9.11.
Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig** bezüglich eines Punktes $p \in U$, falls für alle $x \in U$ die Strecke von p nach x in U liegt.

Satz 9.12.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig, und sei ω eine stetig differenzierbare 1-Form in U. Dann ist ω genau dann exakt, wenn $\partial_i\omega_j = \partial_j\omega_i$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Bemerkung:
Sternförmig ist nicht nötig.

Beweis:

„⇒“ : Bemerkung 9.10.

„⇐“ : O.E. sei U sternförmig bezüglich 0. Für $x \in U$ verläuft dann $\gamma_{0,x} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto tx$ in U.

Wir definieren:
$f : U \to \mathbb{R}, x \mapsto \int\limits_0^1 \omega(\gamma_{0,x}(t), \gamma'_{0,x}(t))\, dt.$
Es ist $f(x) = \int\limits_0^1 \omega(tx, x)\, dt = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i=1}^n \omega_i(tx)x_i\, dt.$
Wegen $\omega \in C^1(U \times R^n; \mathbb{R})$ ist f (nach Satz über parameterabhängige Integrale) differenzierbar mit $\partial_j f(x) = \int\limits_0^1 \partial x_j\omega(tx, x)\, dt$

Es gilt $\partial_j \omega(tx, x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_j(\omega_i(tx)x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} t\partial_j\omega_i(tx)x_i + \omega_j(tx) \cdot 1 = \omega_j'(tx) + \omega_j(tx) = \varphi'(t) \cdot z + \varphi(t) \cdot 1$ für $\varphi(t) = \omega_j(tx)$.
Damit $\partial_j f(x) = t \cdot \omega_j(tx)|_0^1 = \omega_j(x)$
Also ist $df = \omega$.

$\square$

10. Integration auf Untermannigfaltigkeiten

a. Untermannigfaltigkeit

Wir wollen jetzt Funktionen auf Flächen integrieren, insbesondere die konstante Funktion 1 (also den Flächeninhalt messen). Dazu verwenden wir folgende Darstellungen:

Satz 10.1.
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Dann sind äquivalent:

(i) Für alle $a \in M$ existiert eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ einer m-dimensionalen Fläche ($m < n$) mit $M \cap V = \gamma(U)$.

(ii) Für alle $a \in M$ existieren offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^m$ und $f \in C^1(U; \mathbb{R}^{n-m})$ mit $M \cap V = \text{graph } f = \{(u, f(u)) : u \in U\}$.

(iii) Für alle $a \in M$ existieren offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n, W \subset \mathbb{R}^n, g \in C^1(W; \mathbb{R}^{n-m})$ mit rk $g'(x) = n - m$ ($x \in W$) und $M \cap V = \{x \in W : g(x) = 0\}$.

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt (nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten) aus Korollar 6.16. Für die Rang-Bedingung in Korollar 6.16 beachte die Definition von g im Beweis von 6.16.

(iii) $\Rightarrow$ (ii):
(Vergleiche auch Beweis von Satz 6.15)
Wegen rk $g'(a) = n - m$ existieren $i_1, \ldots, i_{n-m}$ mit

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{i_1} g_1(a) & \ldots & \partial_{i_{n-m}} g_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{i_1} g_{n-m}(a) & \ldots & \partial_{i_{n-m}} g_{n-m}(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wegen der Stetigkeit von g' gilt dies auch noch in einer offenen Umgebung $\widetilde{V} \subset W$ von a.
Nummeriere die Koordinaten so um, dass $(i_1, \ldots, i_{n-m}) = (m+1, \ldots, n)$.
Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren offene Umgebungen $U_1 \subset \mathbb{R}^m$ von $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-m}$, $U_1 \times U_2 \subset \widetilde{V}$, und ein $f \in C^1(U_1; \mathbb{R}^{n-m})$ mit $M \cap (U_1 \times U_2) = \{(u, z) \in U_1 \times U_2 : z = f(u)\} = \text{graph } f$.

Setze $V := U_1 \times U_2, U := U_1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i):
Setze $\gamma : U \to \mathbb{R}^n, \gamma(u) := \begin{pmatrix} u \\ f(u) \end{pmatrix}$.
Dann ist $\gamma \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{rk} \gamma'(u) = m$ $(u \in U)$ und $M \cap V = \gamma(U)$.

□

Definition 10.2.
Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **m-dimensionale (C^1-)Untermannigfaltigkeit**, falls M die äquivalenten Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus Satz 10.1 erfüllt. Eine Parametrisierung wie in 10.1 (i) heißt eine **Karte** von M.
Ersetzt man überall C^1 durch $C^k, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so erhält man eine C^k-Untermannigfaltigkeit.

Beispiel 10.3.
$n-1$-dimensionale Sphäre $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$:

(i) Es ist $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}, g(x) := |x|^2 - 1$.

(ii) Sei $a \in S_{n-1}$ mit $a_n > 0$, $U := \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : |u| < 1\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Dann gilt $S_{n-1} \cap (U \times (0,\infty)) = \{(u, f(u)) : u \in U\}$ für $f : U \to \mathbb{R}, u \mapsto f(u) := \sqrt{1 - |u|^2}$
Für $a_n < 0$ gilt eine analoge Darstellung mit $f(u) = -\sqrt{1-|u|^2}$.
Falls $a_n = 0$, existiert ein Index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $a_i \neq 0$. Dann analog.

Satz 10.4 (Bügeleisensatz ;-)).
Eine Menge $M \subset R^n$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit, falls es für alle $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von a und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to W, W \subset \mathbb{R}^n$ offen gibt mit $\Phi(M \cap V) = \{x \in W : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$.

Beweis:

(a) Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Schreibe $M \cap V = \{(u, f(u)) : u \in U\}$ wie in 10.1 (ii). O.E. sei $V = U \times U', U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $U' \subset \mathbb{R}^{n-m}$ offen. Sei $\Phi : V \to \mathbb{R}^n, \Phi(u,z) := (u, z - f(u))$. Dann ist $\Phi(V) =: W$ offen, $\Phi : V \to W$ ist Diffeomorphismus mit $\Phi(V \cap M) = \{x \in W : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$.

(b) Sei Φ wie angegeben. Dann ist $M \cap V = \{x \in V : g(x) = 0\}$ für $g(x) := \begin{pmatrix} \Phi_{m+1}(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix}$. Es ist $\operatorname{rk} g'(x) = n - m$, da $\operatorname{rk} \Phi'(x) = n$ $(x \in V)$.

□

Satz 10.5 (Kartenwechsel).
Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\gamma_j : \mathbb{R}^m \supset U_j \to V_j \subset M$, $j = 1, 2$, zwei Karten von M mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.
Dann ist $W_j := \gamma_j^{-1}(V) \subset U_j$ offen, und $\varphi := \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : W_1 \to W_2$ ist Diffeomorphismus.

Beweis:
Da V offen ist und γ_j stetig, ist W_j offen. Nach Konstruktion ist $\varphi : W_1 \to W_2$ bijektiv.
Sei $c_1 \in W_1$ beliebig und $a := \gamma_1(c_1) \in M, c_2 := \gamma_2^{-1}(a) = \varphi(c_1)$.
Nach Satz 10.4 existiert ein Diffeomorphismus $\Phi : U \to U'$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von a, $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $\Phi(M \cap U) = \{x \in U' : x_{m+1} = \ldots x_n = 0\} = U' \cap \underbrace{(\mathbb{R}^m \times \{0\})}_{\subset \mathbb{R}^n}$.

O.E. sei $M \cap U \subset V$. Setze $W_j' := \gamma_j^{-1}(M \cap U) \subset W_j$. Auf W_j' gilt $\Phi \circ \gamma_j = \begin{pmatrix} g_1^{(j)} \\ \vdots \\ g_m^{(j)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit

$g_i^{(j)} \in C^1(W_j'; \mathbb{R})$

Setze $g^{(j)} := \begin{pmatrix} g_1^{(j)} \\ \vdots \\ g_m^{(j)} \end{pmatrix}$.

Da $\operatorname{rk} \Phi' = n, \operatorname{rk} \gamma_j' = m$, folgt nach der Kettenregel $\operatorname{rk} (g^{(j)})' = m$. Damit ist $g^{(j)} : W_j' \to U' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$ ein Diffeomorphismus.

Auf W_1' gilt $\varphi = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 = (\Phi \circ \gamma_2)^{-1} \circ (\Phi \circ \gamma_1) = (g^{(2)})^{-1} \circ g^{(1)}$, also ist $\varphi|_{W_1'}$ ein Diffeomorphismus.
Da $c_1 \in W_1$ beliebig war, ist $\varphi : W_1 \to W_2$ ein Diffeomorphismus.

□

Bemerkung 10.6.
Die Eigenschaft des letzten Satzes benötigt keinen „Differenzierbarkeitsbegriff“ auf M. Dies ist die Grundlage der Definition einer Mannigfaltigkeit (im Gegensatz zur Untermannigfaltigkeit, bei der $M \subset \mathbb{R}^n$ war).

b. Maßtensor und Integration

Wir wollen jetzt über Flächen (bzw. Untermannigfaltigkeiten) integrieren, insbesondere wollen wir Flächen messen.
Sei $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Karte einer Untermannigfaltigkeit M.
Zur Motivation sei zunächst $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, d.h. $f(z) = Az$ mit $A = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Dann ist $W := f([0,1]^m)$ der von den Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_m$ aufgespannte Parallelepiped (Spat).
Nach dem Transformationssatz ist $\mu_m(W) = \int\limits_W 1 = \int\limits_{[0,1]^m} 1 \cdot \underbrace{|\det f'(z)|}_{=|\det(A)|} dz = |\det A| \cdot \mu_m([0,1]^m) = |\det A|$.
Also ist $(\mu_m(W))^2 = (\det(A))^2 = \det A^t \cdot \det A = \det(A^t A) = \det\left[\begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_m^t \end{pmatrix} \cdot (v_1, \ldots, v_m)\right] = \det\left[\left(\left\langle v_i, v_j \right\rangle\right)_{i,j=1,\ldots,m}\right]$.
Das Volumen eines Würfels wird also mit dem Faktor $\sqrt{\det(\left\langle v_i, v_j \right\rangle_{i,j=1,\ldots,m})}$ multipliziert.

Jetzt zu γ: lokal wird die Fläche (approximativ) durch die Vektoren $\gamma(u+h\cdot e_i) - \gamma(u)$ aufgespannt. Im Limes $h \to 0$ erhält man die partiellen Ableitungen $\partial_i\gamma(u), i = 1, \ldots, m$.
Mit $v_i := \partial_i\gamma(u) \in \mathbb{R}^n$ gilt $\gamma'(u) = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
Es scheint plausibel, dass das m-dimensionale Volumen eines kleinen Würfels mit dem Faktor $\sqrt{\det(\left\langle v_i, v_j \right\rangle_{i,j=1,\ldots,m})} = \sqrt{\det(\gamma'(u)^t \cdot \gamma'(u))}$ multipliziert wird.

Definition 10.7.
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M.
Definiere die **Gram'sche Matrix („Maßtensor") von** M **bezüglich** γ durch $G : U \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $G(u) := \gamma'(u)^t \cdot \gamma'(u) = (\left\langle \partial_i\gamma(u), \partial_j\gamma(u) \right\rangle)_{i,j=1,\ldots,m}$. Die Gramsche Determinante $g : U \to \mathbb{R}$ ist definiert als $g(u) := \det G(u)$.

Lemma 10.8 (Maßtensor bei Kartenwechsel)**.**
In der Situation von Satz 10.5 sei G_j bzw. g_j, $j = 1, 2$, die Gramsche Matrix bzw. Determinante bezüglich γ_j. Dann gilt mit $\varphi : W_1 \to W_2, \varphi : \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$:

$$G_1(u) = (\varphi'(u))^t G_2(\varphi(u))\varphi'(u) \qquad (u \in W_1)$$
$$g(u) = |\det \varphi'(u)|^2 \cdot g_2(\varphi(u)) \qquad (u \in W_1)$$

Beweis:
Aus $\varphi = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$, d.h. $g_1 = \gamma_2 \circ \varphi$, folgt mit der Kettenregel $\gamma_1'(u) = \gamma_2'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$. Damit folgt die Behauptung aus der Definition von G_i bzw. g_i.

□

Lemma 10.9.
Seien $m \leq n$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Für $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$ sei $A_{i1,\ldots,im}$ die $m \times m$ Matrix, die aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_m$ von A besteht. Analog für B. Dann gilt

$$\det(A^tB) = \sum_{i_1<\ldots<i_m} \det(A_{i_1\ldots i_m}) \cdot \det(B_{i_1\ldots i_m}) \qquad (*)$$

Beweis:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ fest, $A = (a_1 \ldots a_m), a_i \in \mathbb{R}^n$.

(i) Für $B = (e_{j1} \ldots e_{jm})$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ (e_j j-ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$) gilt:
$\det B_{i_1\ldots i_m} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (i_1, \ldots, i_m) = (j_1, \ldots, j_m) \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$
Ebenso ist $A^tB = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_m^t \end{pmatrix} (e_{j_1} \ldots e_{j_m}) = (A_{j_1\ldots j_m})^t$.
Also stimmt (*) in diesem Fall.

(ii) Sei nun $B = (e_{j_2}, \ldots, e_{j_m})$ mit $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}$.
Falls zwei Indizes gleich sind, sind auf beiden Seiten von (*) die Spalten linear abhängig und die Determinante 0.
Sonst sieht man (mit Spaltenvertauschen) wie in (i), dass (*) gilt.

(iii) Falls (*) für eine Matrix $B = (b_1, \ldots, b_m)$ gilt, so auch für $B' := (b, \ldots, \lambda b_j, \ldots, b_m)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Denn man erhält auf beiden Seiten von (*) den Faktor λ.

(iv) Falls (*) für $B' = (b_1, \ldots, b_j', \ldots, b_m)$ und $B'' = (b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_m)$ gilt, so auch für $B := (b_1, \ldots, b_j' + b_j'', \ldots, b_m)$.

Nach (i) - (iv) gilt (*) für alle Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

□

Korollar 10.10.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, m \leq n$. Dann gilt $\det(A^tA) = \sum_{i_1<\ldots<i_m} (\det A_{i_1\ldots i_m})^2$.

(b) Für die Gramsche Determinante g von M bezüglich γ gilt

$$g(u) = \sum_{i_1 \ldots i_m} (\det(\gamma'(u))_{i_1 \ldots i_m})^2 > 0 \; (u \in U).$$

Beweis:

(a) Lemma 10.9 mit $A = B$.

(b) Die Gleichheit in (b) folgt direkt aus (a). Wegen $\operatorname{rk} \gamma'(u) = m$ ist $\operatorname{rk}(\gamma'(u)^t \gamma'(u)) = m$ und damit $g(u) = \det(\gamma'(u)^t \gamma'(u)) \neq 0$.

□

Definition 10.11 (Integral über Untermannigfaltigkeiten, Oberflächenintegral)**.**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Sei $\gamma : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, und es gelte $f|_{M \setminus \gamma(U)} = 0$. Sei g die Gramsche Determinante von M bezüglich γ. Dann heißt f integrierbar über M, falls $u \mapsto f(\gamma(u))\sqrt{g(u)}, U \to \mathbb{R}$, über U integrierbar ist. In diesem Fall setze $\int\limits_M f\,dS := \int\limits_M f(x)\,dS(x) := \int\limits_U f(\gamma(u))\sqrt{g(u)}\,du$.
   Das S kommt von „surface" (Oberfläche). Man schreibt auch $\int f\,dA$ (A von „area").

2. Seien $\gamma_j : U_j \to \mathbb{R}^n$ Karten von M, und für $V_j := \gamma_j(U_j)$ gelte $\bigcup_{j=1}^k V_j = M$. Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar über M, falls Funktionen $\varphi_j : M \to \mathbb{R}, j = 1, \ldots, k$ existieren mit:

   (i) $0 \leq \varphi_j \leq 1$,

   (ii) $\varphi_j|_{M \setminus V_j} = 0$,

   (iii) $\sum_{j=1}^k \varphi_j(x) = 1, x \in M$,

   (iv) $f \cdot \varphi_j$ ist integrierbar über M im Sinne von 1.

   In diesem Fall setze $\int\limits_M f\,dS := \sum\limits_{j=1}^k \int\limits_M f \cdot \varphi_j\,dS$.
   Eine Familie $\{\varphi_j\}_{j=1,\ldots,k}$ mit (i) - (iv) heißt eine Partition der Eins bezüglich $\{V_j\}_{j=1,\ldots,j}$.

Bemerkung 10.12.

(a) Mit Hilfe von Lemma 10.8 und des Transformationssatzes kann leicht zeigen, dass $\int\limits_M f\,dS$ wohldefiniert ist.

(b) Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine globale Karte, d.h. $M = \gamma(U)$.

Falls $m = n$, so ist $\int\limits_M 1\, dS = \int\limits_U 1 \cdot \sqrt{g(u)}\, du = \int\limits_U \sqrt{\det(\gamma'(u)^t \underbrace{\gamma'(u)}_{\in\mathbb{R}^{n\times n}})}\, du =$

$\int\limits_U \sqrt{(det\gamma'(u)^2)}\, du = \int\limits_U |\det \gamma'(u)|\, du = \int\limits_M 1\, dx.$

Für $m = n$ ist also $\int\limits_M 1\, dS$ wieder das bekannte n-dimensionales Volumen.

(c) Sei $m = 1$: dann ist $\gamma'(u) \in \mathbb{R}^n$ und damit $\gamma'(u)^t\gamma'(u) = |\gamma'(u)|^2$. Sei $U = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

$\int\limits_M 1\, dS = \int\limits_U \sqrt{\det(\underbrace{\gamma'(u)^t\gamma'(u)}_{\in\mathbb{R}})}\, du = \int\limits_a^b \sqrt{|\gamma'(u)|^2}\, du = \int\limits_a^b |\gamma'(u)|\, du = L([\gamma]).$

Für $m = 1$ ist also $\int\limits_M 1\, dS$ wieder die bekannte Bogenlänge der Kurve $[\gamma]$.

Definition 10.13.
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Menge $A \subset M$ heißt **integrierbare Teilmenge** von M, falls χ_A integrierbar über M ist. In diesem Fall heißt $\mu_m(A) := \int\limits_M \chi_A\, dS$ das m-dimensionale Volumen von $A \subset \mathbb{R}^n$.

$f : M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über A, falls $f \cdot \chi_A$ integrierbar über M ist. Setze $\int\limits_A f\, dS := \int\limits_M f \cdot \chi_A\, dS$.

c. Anwendungen und Beispiele

Beispiel 10.14 (Rotationsflächen)**.**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in C^1(I;\mathbb{R})$ mit $f(t) \geq 0, t \in I$. Setze $M := \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in I, x^2 + y^2 = f(z)^2\}$

Dann ist $M \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und $\gamma : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \gamma\begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(t)\cos\varphi \\ f(t)\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$ ist eine Karte von M mit Wertebereich $R(\gamma) = M \setminus \underbrace{(0,\infty) \times \{0\} \times I}_{\textit{Nullmenge}}$

Es ist $\gamma'\begin{pmatrix} t \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und damit

$(\gamma')^t\gamma' = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\varphi & f'(t)\sin\varphi & 1 \\ -f(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(t)^2 + 1 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix}$

Also ist $\sqrt{g(t,\varphi)} = f(t)\sqrt{f'(t)^2 + 1}$.

Damit ist $\mu_2(M) = \int\limits_{I\times(0,2\pi)} 1 \cdot \sqrt{g(t,\varphi)}\, d(t,\varphi) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_I f(t)\sqrt{f'(t)^2+1}\,dt\,d\varphi$

$= 2\pi \int\limits_I f(t)\sqrt{f'(t)^2+1}\,dt.$

Beispiel 10.15 (Zylinderoberfläche)**.**
Sei $I = (0,1), f(t) \equiv 1$.

Dann ist $M =: Z$ ein Zylinder, und $\mu_2(Z) = 2\pi \int\limits_0^1 1\,dt = 2\pi$.

Beispiel 10.16.

(a) (Oberfläche eines Graphen). Sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $F \in C^1(U;\mathbb{R})$. Dann ist $M := \operatorname{graph} F \subset R^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit globaler Karte $\gamma(u) := \begin{pmatrix} u \\ F(u) \end{pmatrix}$.

Es ist $\gamma'(u) = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ F'(u) \end{pmatrix}$, und nach Korollar 10.10 (b) ist $g(u) = \det(\gamma'(u)^t\gamma'(u)) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1}(\partial_i F(u))^2 = 1 + |\nabla F(u)|^2$. Für integrierbares $f : M \to \mathbb{R}$ ist also

$$\boxed{\int_M f\,dS = \int_U f(u, F(u))\,\sqrt{1+|\nabla F(u)|^2}\,du}$$

Insbesondere: $\boxed{\mu_{n-1}(\operatorname{graph} F) = \int_U \sqrt{1+|\nabla F(u)|^2}\,du}$

(b) Zu $r > 0$ sei nun $U := \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : |u| < r\}, F(u) := \sqrt{r^2 - |u|^2}$.
Dann ist $M := \operatorname{graph} F = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r, x_n > 0\}$ (Nordhalbkugel mit Radius r).
Es ist $\nabla F(u) = -\frac{u}{\sqrt{r^2-|u|^2}}$. Die Gramsche Determinante ist gegeben durch $g(u) = 1 + |\nabla F(u)|^2 = 1 + \frac{|u|^2}{r^2-|u|^2} = \frac{r^2}{r^2-|u|^2}$. Für integrierbares $f : M \to \mathbb{R}$ gilt
$\int_M f\,dS = \int_{|u|<r} f(u, \sqrt{r^2-|u|^2})\frac{r}{\sqrt{r^2-|u|^2}}\,du =$ Substitution: $u = rv$, $du = r^{n-1}\,dv$
$= \int_{|v|<1} f(rv, r\sqrt{1-|v|^2})\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|v|^2}}\,dv$

Satz 10.17.
Sei $f \in \mathcal{R}_n$ (Riemann-integrierbar), und für alle $r > 0$ sei f integrierbar über $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$. Dann gilt

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} f(x)\,dS(x)\right)dr}$$

Beweis:
Sei $U = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : |u| < 1\}$. Definiere $\Phi : U \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ru \\ r\sqrt{1-|u|^2} \end{pmatrix}$.
Dann ist $\Phi : U \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Diffeomorphismus, und nach dem Transformationssatz ist $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f(x)\,dx = \int_{U\times(0,\infty)} f(\Phi\begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix}) \cdot |\det \Phi'\begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix}|d(u,r)$
$= \int_0^\infty \int_U f\begin{pmatrix} ru \\ r\sqrt{1-|u|^2} \end{pmatrix} \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|u|^2}}\,du\,dr = \int_0^\infty \left(\int_{|u|=r} f(u)\,dS(u)\right)dr.$

□

Satz 10.18.
Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\}$ und $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = \partial B_n$. Dann gilt

$$\boxed{\mu_{n-1}(S_{n-1}) = n\mu_n(B_n)}$$

Speziell ist $\mu_1(S_1) = 2\pi, \mu_2(S_2) = 4\pi$

Beweis:
Wende Satz 10.17 auf $f = \chi_{B_n}$ an: $\mu_n(B_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_n} = \int\limits_0^\infty \int\limits_{|x|=r} \chi_{B_n}(x)\,dS(x)\,dr = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{|x|=r} 1\,dS(x) \right) dr = \int\limits_0^1 \int\limits_{|x|=1} r^{n-1} \cdot 1\,dS(x)\,dr = \mu_{n-1}(S_{n-1}) \cdot \int\limits_0^1 r^{n-1}\,dr = \frac{1}{n}\mu_{n-1}(S_{n-1})$.

□

Satz 10.19 (rotationssymmetrische Funktionen)**.**
Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $x \mapsto f(|x|)$ *integrierbar. Dann ist*

$$\boxed{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\,dx = \mu_{n-1}(S_{n-1}) \int\limits_0^\infty f(r) r^{n-1}\,dr}$$

Beweis:
Nach Satz 10.17 ist $\int\limits_{R^n} f(|x|)\,dx = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{|x|=r} f(|x|)\,dS(x) \right) dr = \int\limits_0^\infty f(r) \left(\int\limits_{|x|=r} 1\,dS(x) \right) dr = \mu_{n-1}(S_{n-1}) \cdot \int\limits_0^\infty f(r) r^{n-1}\,dr$.

□

11. Die Sätze von Gauß und Stokes

a. Einige geometrische Begriffe

Wir wollen nun den Begriff des Tangentialraums vertiefen.

Definition 11.1.
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $a \in M$.
Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** an M im Punkt a, falls es ein $\varphi \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^n)$ (mit $\varepsilon > 0$) gibt mit $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M, \varphi(0) = a, \varphi'(0) = v$.
$T_aM := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}$ heißt der **Tangentialraum** an M in a.

Satz 11.2.
Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $a \in M$.

(a) *T_aM ist ein m-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.*

(b) *Sei $\gamma : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M und $u \in U$ mit $\gamma(u) = a$.*
Dann bilden die Vektoren $\partial_1\gamma(u), \ldots, \partial_m\gamma(u) \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von T_aM, d.h. $T_aM = R(\gamma'(u)) = im(\gamma'(u))$ (Wertebereich der Matrix $\gamma'(u)$).

(c) *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in V$, $g \in C^1(V; \mathbb{R}^{n-m})$ mit $M \cap V = \{x \in V : g(x) = 0\}$, $rk\, g'(a) = n - m$. Dann gilt $T_aM = \ker g'(a) = \{v \in \mathbb{R}^m : g'(a)v = 0\}$.*

Beweis:
Sei $V_1 := R(\gamma'(u)), V_2 := \ker(g'(a))$. Wir zeigen: $V_1 \subset T_aM \subset V_2$.
Wegen $\dim V_1 = \dim V_2 = m$ folgen dann die Behauptungen (a) - (c).

(i) Sei $v = \sum_{i=1}^{m} c_i\partial_i\gamma(u) \in R(\gamma'(u)), c_i \in \mathbb{R}$. Sei $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \varphi(\tau) := \gamma(u + \tau c)$ mit $c := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$.
Dann ist $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M, \varphi(0) = \gamma(u) = a$, $\varphi'(0) = \gamma'(u) \cdot c = v$, d.h. $v \in T_aM$.

(ii) Sei $v = \varphi'(0) \in T_aM$ mit φ wie oben. Wegen $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M$ ist $g(\varphi(\tau)) = 0$ $(|\tau| < \varepsilon)$.
Also ist $0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} g(\varphi(\tau))|_{\tau=0} = g'(\varphi(0))\varphi'(0) = g'(a)v$ und damit $v \in \ker g'(a)$.

□

Beachte, dass in Abschnitt 6 der zugehörige affine Unterraum $a + T_aM$ betrachtet wurde.

Definition 11.3 (glatter Rand).
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann hat A einen **glatten Rand**, falls es zu jedem $a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein $\psi \in C^1(U;\mathbb{R})$ gibt mit $\nabla\psi(u) \neq 0$ $(u \in U)$ und $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$.

Lemma 11.4.

(a) Für $a \in \partial A$, ψ wie in 11.3, gilt: $\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}$.

(b) ∂A ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beweis:

(a) (i) Sei $x \in \partial A \cap U$. Angenommen, $\psi(x) < 0$. Dann existiert eine Umgebung $V \subset U$ von x mit $\psi(y) < 0$ für $y \in V$. Insbesondere ist $V \subset A$ und damit ist $x \in \mathring{A}$, Widerspruch.

(ii) Sei $x \in U$ mit $\psi(x) = 0$. Für $v := \nabla\psi(x) \neq 0$ gilt:

$$\psi(x+h) = \underbrace{\psi(x)}_{=0} + \Big\langle \underbrace{\nabla\psi(x)}_{=v}, h \Big\rangle + o(|h|) \quad (h \in \mathbb{R}^n, h \to 0).$$

Für $h := tv, t \in \mathbb{R}$ erhält man: $\psi(x+tv) = t|v|^2 + o(t|v|)$.
Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\psi(\underbrace{x - tv}_{\in A}) < 0 < \psi(\underbrace{x + tv}_{\notin A})$ für $0 < t < \varepsilon$.

Also enthält jede Umgebung von x Punkte in A und Punkte in $\mathbb{R}^n \setminus A$. D.h. $x \in \partial A$.

(b) folgt aus (a) wegen $\operatorname{rk} \psi'(u) = 1$ $(u \in U)$

□

Bemerkung 11.5.
Sei A kompakt mit glattem Rand. Sei $N_a(\partial A) := (T_a(\partial A))^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \forall\, v \in T_a(\partial A) : \langle v, w\rangle = 0\}$ der **Raum aller Normalenvektoren**. Es gilt $\dim N_a(\partial A) = 1$.
Damit existiert genau ein Vektor $\nu(a) \in (T_a(\partial A))^\perp$ mit $|\nu(a)| = 1$ und der Eigenschaft:
$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, t \in (0,\varepsilon) : a + t\nu(a) \notin A$.

$\nu(a)$ heißt **äußerer Normalenvektor** von A im Punkt $a \in \partial A$.

Im Beweis von 11.4 haben wir gesehen: $\nu(a) = \frac{\nabla\psi(a)}{|\nabla\psi(a)|}$.
Damit ist $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n, a \mapsto \nu(a)$ stetig.

Besser als die Darstellung $\psi(x) \leq 0$ wäre eine Darstellung der Form $x_n \leq g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ (vergleiche auch Normalbereiche). Nach dem Satz über implizite Funktionen (man studiere dessen Beweis) existiert nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein Intervall $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ und $g \in C^1(U; \mathbb{R})$ mit $A \cap (U \times I) = \{x = (x', x_n) \in U \times I : x_n \leq g(x')\}$ bzw. $A \cap (U \times I) = \{x = (x', x_n) \in U \times I : x_n \geq g(x')\}$.

D.h. in Definition 11.3 kann man $\psi(x) = x_n - g(x')$ bzw. $\psi(x) = -(x_n - g(x'))$ wählen.
Dann ist $\nu(a) = \frac{\nabla\psi(a)}{|\nabla\psi(a)|} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g(a')|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(a') \\ 1 \end{pmatrix} (a \in \partial A, a' := (a_1, \ldots, a_{n-1}))$.
Es gilt $\partial A \cap (U \times I) = \{x = (x', x_n) \in U \times I : x_n = g(x')\}$.

b. Der Satz von Gauß

Lemma 11.6.
Sei $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}, h \in C^1(U';\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} h \subset U'$ kompakt.
Dann gilt $\int\limits_{U'} \partial_i h(u)\,du = 0$ ($i = 1, \dots, n-1$).

Beweis:
Wegen $\operatorname{supp} h \subset U'$ gilt $\widetilde{h} \in C^1(\mathbb{R}^{n-1};\mathbb{R})$ für die Fortsetzung $\widetilde{h}(u) := \begin{cases} h(u) & , u \in U' \\ 0 & , u \notin U'. \end{cases}$

Ebenso ist $\int\limits_U \partial_i h = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_i h.$
O.E. sei also $U' = \mathbb{R}^{n-1}$.
O.E. sei $i = 1$. Wähle $R > 0$ mit $\operatorname{supp} h \subset [-R, R]^{n-1}$.
Für $(x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ fest gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
$\int\limits_{\mathbb{R}} \partial_1 h(x)\,dx_1 = \int\limits_{-R}^{R} \partial_1 h(x)\,dx_1 = h(x_1, \dots, x_{n-1})|_{x_1=-R}^{R} = 0.$
Integriere bezüglich $(x_2, \dots, x_{n-1})$ und erhalte die Behauptung.

$\square$

Satz 11.7 (Spezialfall des Satzes von Gauß)**.**
Sei $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}, g \in C^1(U';\mathbb{R})$ mit $g(U') \subset I$.
Sei $A := \{x \in U' \times I : x_n \leq g(x')\}$ und $M : \{x \in U' \times I : x_n = g(x')\}$.
Sei $\nu(x) := \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla g(x')|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(x') \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (Normalenvektor).
Für $f \in C^1(U' \times I;\mathbb{R})$ mit
$\operatorname{supp} f \subset U' \times I$ kompakt gilt: $\int\limits_A \partial_i f(x)\,dx = \int\limits_M f(x)\nu_i(x)\,dS(x)$ ($i = 1, \dots, n$).

Beweis:
Wegen $M = \operatorname{graph} g$ gilt nach Beispiel 10.16 (a) für integrierbares $h : M \to \mathbb{R}$:

$$\int\limits_M h\,dS = \int\limits_{u'} h(u, g(u))\,\sqrt{1 + |\nabla g(u)|^2}\,du \tag{1}$$

(i) Sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Definiere $F : U' \times U \to \mathbb{R}, F(x'z) := \int\limits_\alpha^z f(x', x_n)\,dx_n$.

Dann ist $\frac{\partial}{\partial z} F(x', z) = f(x', z)$ und $\partial_i F(x', z) = \int\limits_\alpha^z \partial_i f(x', x_n)\,dx_n$.

Definiere $h(x') := \int\limits_{\alpha}^{g(x')} f(x', x_n)\, dx_n = F(x', g(x'))$. Dann ist $\operatorname{supp} h \subset U'$ kompakt (!)
Nach der Kettenregel folgt

$$\partial_i h(x') = \partial_i F(x', g(x')) = \int\limits_{\alpha}^{g(x')} \partial_i f(x', x_n)\, dx_n + f(x', g(x')) \cdot \partial_i g(x') \tag{2}$$

Nach Lemma 11.6 gilt $\int\limits_{U'} \partial_i h(x')\, dx' = 0$. Damit

$$\int\limits_A \partial_i f(x)\, dx = \int\limits_{U'} \int\limits_{\alpha}^{g(x')} \partial_i f(x', x_n) x_n\, dx' \qquad \text{(Fubini)}$$

$$= \underbrace{\int\limits_{U'} \partial_i h(x')\, dx'}_{=0} - \int\limits_{U'} f(x', g(x')) \partial_i g(x')\, dx' \qquad \text{(nach (2))}$$

$$= \int\limits_{U'} f(x', g(x')) \nu_i(x', g(x')) \sqrt{1 + |\nabla g(x')|^2}\, dx' \qquad \text{(Definition } \nu_i)$$

$$= \int\limits_M f(x) \nu_i(x)\, dS(x) \qquad \text{(nach (1))}$$

(ii) Sei nun $i = n$. Für $x' \in U'$ fest hat $x_n \mapsto f(x', x_n)$ einen kompakten Träger in $I = (\alpha, \beta)$.
Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt:
$\int\limits_{A}^{g(x')} \partial_n f(x', x_n)\, dx_n = f(x', g(x'))$.

Damit $\int\limits_A \partial_n f(x)\, dx = \int\limits_{U'} \int\limits_{\alpha}^{g(x')} \partial_n f(x', x_n)\, dx_n\, dx' = \int\limits_{U'} f(x', g(x'))\, dx'$

$$= \int\limits_{U'} f(x', g(x')) \nu(x', g(x')) \sqrt{1 + |\nabla g(x')|^2}\, dx' \qquad \text{(Definition von } \nu_n)$$

$$= \int\limits_M f(x) \nu_n(x)\, dS(x) \qquad \text{(nach (1))}$$

□

Für den echten Satz von Gauß brauchen wir noch Zerlegungen:

Lemma 11.8 (von Lebesque).
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Dann existiert eine Zahl

$\lambda > 0$, so dass gilt: falls $K \subset \mathbb{R}^n$ mit diam $K \leq \lambda$ und $K \cap A \neq \emptyset$, so existiert ein $i_0 \in I$ mit $K \subset U_{i_0}$.
[*diam* $K := \sup\{|x - y| : x, y \in K\}$]

Beweis:
Zu $a \in A$ existiert ein $r(a) > 0$ und $i \in I$ mit $B(a, r(a)) \subset U_i$.
Da A kompakt ist, besitzt die offene Überdeckung $A \subset \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \frac{r(a)}{2})$ eine endliche Teilüberdeckung $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(a_k, \frac{1}{2} r(a_k))$.
Sei $\lambda := \min\{\frac{1}{2} r(a_1), \ldots, \frac{1}{2} r(a_n)\}$. Sei $K \subset \mathbb{R}^n, A \cap K \neq \emptyset$, diam $K \leq \lambda$. Wähle $a \in K \cap A$. Dann existiert $k \in \{1, \ldots, m\}$ und $i_0 \in I$ mit $a \in B(a_k, \frac{1}{2} r(a_k)) \subset U_{i_0}$. Wegen diam $K \leq \lambda \leq \frac{1}{2} r(a_k)$ folgt aus der Dreiecksungleichung: $K \subset B(a_k, r(a_k)) \subset U_{i_0}$.

□

Bemerkung 11.9 (Partition der Eins). (a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \exp(-\frac{1}{1-t^2}) \cdot \chi_{(-1,1)}(t)$. Dann ist $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) : \text{supp } f \text{ kompakt}\}$.

(b) Sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} g(t - k)$. Dann ist $G > 0, G \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ (beachte: an jeder Stelle t sind endlich viele Summanden verschieden von 0) und es gilt $G(t) = G(t - k)$ für $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Setze $h(t) := \frac{g(t)}{G(t)}$ $(t \in \mathbb{R})$.
Dann ist $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, supp $h \subset [-1, 1]$ und $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} h(t - k) = 1$ $(t \in \mathbb{R})$.

(c) Zu $p \in \mathbb{Z}^n, \varepsilon > 0$ sei $\varphi_{p\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \prod\limits_{i=1}^{n} h(\frac{x_i}{\varepsilon} - p_i)$. Dann ist $\varphi_{p\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, supp $\varphi_{p\varepsilon} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \varepsilon p\|_\infty \leq \varepsilon\}$ und $\sum\limits_{p \in \mathbb{Z}} \varphi_{p\varepsilon}(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Wir kommen jetzt zum Satz von Gauß. Dazu erinnern wir an die Divergenz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Dann war div $F : \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i F_i$, div $F : U \to \mathbb{R}$.

Satz 11.10. *von Gauß*
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand. Sei $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ die äußere Normale und $U \supset A$ offen. Sei $F \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\boxed{\int\limits_A div\, F(x) x = \int\limits_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)}$$

Beweis:
Nach Bemerkung 11.5 (b) ist ∂A lokal durch eine Gleichung der Form $x_n = g(x')$ beschrieben. Daher existiert eine offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ mit folgender Eigenschaft: entweder $U_i \subset \mathring{A}$ oder (nach Umnummerierung) $U_i = U' \times (\alpha, \beta)$, $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen,
$A \cap U_i = \{x \in U' \times (\alpha,\beta) : x_n \le g(x')\}$ mit $g \in C^1(U';\mathbb{R})$.
Sei $\lambda > 0$ wie in Lemma 11.8, $\varepsilon := \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$ und $\{\varphi_{p\varepsilon}\}_{p\in\mathbb{Z}^n}$ wie in Bemerkung 11.9 (c).
Dann gilt diam supp $\varphi_{p\varepsilon} \le$ diam $\{x : \|x - \varepsilon p\|_\infty \le \varepsilon\} = \sqrt{n}\cdot 2\varepsilon = \lambda$.
Nach Lemma 11.8 gilt:

$$\forall\, p \in P\ \exists\, i \in I : \operatorname{supp} \varphi_{p\varepsilon} \subset U_i \tag{3}$$

wobei $P := \{p \in \mathbb{Z}^n : \operatorname{supp} \varphi_{p\varepsilon} \cap A \neq \emptyset\}$ (endlich!).
Wegen $\sum\limits_{p\in P} \varphi_{p\varepsilon} \equiv 1$ ist $\int\limits_A \operatorname{div} F = \sum\limits_{p\in P} \int\limits_A \operatorname{div}(F\cdot\varphi_{p\varepsilon})$, $\int\limits_{\partial A} \langle F, v\rangle\, dS = \sum\limits_{p\in P} \int\limits_{\partial A} \left\langle F\cdot\varphi_{p\varepsilon}, \nu\right\rangle dS$.
Sei $p \in P$ und i aus b. Falls $U_i \subset \mathring{A}$, so ist

$$\int\limits_A \operatorname{div}(\varphi_{p\varepsilon} F) = \int\limits_{\partial A} \left\langle \varphi_{p\varepsilon} F, \nu\right\rangle dS \tag{4}$$

da nach Lemma 11.6 die linke Seite verschwindet und wegen supp $\varphi_{p\varepsilon} \subset A$ auch die rechte Seite.
Falls $U_i \cap \partial A \neq \emptyset$, d.h. $U_i \cap A = \{x \in U' \times (\alpha,\beta) : x_n \le g(x')\}$, folgt (2) nach Satz 11.7.
Summiere über $p \in P$ und erhalte die Behauptung.

□

Beispiel 11.11.
Sei $F = id_{\mathbb{R}}$. Dann ist $\operatorname{div} F(x) = \sum\limits_{i=1}^n \partial_i F_i(x) = \sum\limits_{i=1}^n \partial_i x_i = \sum\limits_{i=1}^n 1 = n$. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand. Dann ist $\mu(A) = \frac{1}{n}\int\limits_A \operatorname{div} F = \frac{1}{n}\int\limits_{\partial A} \langle x, \nu(x)\rangle\, dS(x)$. (Gauß)
Speziell sei $A = B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) \le 0\}$ mit $\psi(x) := |x|^2 - 1$.
Für $x \in \partial B_n$ ist $\nu(x) = \frac{\nabla\psi(x)}{|\nabla\psi(x)|} = \frac{2x}{2|x|} = x$ (da $|x| = 1$). Also
$\mu_n(B_n) = \frac{1}{n}\int\limits_{\partial B_n} \underbrace{\langle x, x\rangle}_{=|x|^2=1} dS(x) = \frac{1}{n}\int\limits_{S_{n-1}} 1\, dS(x) = \frac{1}{n}\mu_{n-1}(S_{n-1})$.

Korollar 11.12.
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, $U \supset A$ offen.

(a) *Für $f \in C^1(U;\mathbb{R})$ gilt $\int\limits_A \partial_i f(x)\, dx = \int\limits_{\partial A} \nu_i(x)\cdot f(x)\, dS(x)$ für $i = 1,\ldots,n$.*

(b) Seien $f, g \in C^2(U;\mathbb{R})$ und $\Delta := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2$ der Laplace-Operator. Dann gilt die Greensche Formel:

$$\int_A (f\Delta g - g\Delta f)x = \int_{\partial A} (f\tfrac{\partial g}{\partial \nu} - g\tfrac{\partial f}{\partial \nu})\, dS(x)$$

Dabei ist $\frac{\partial f}{\partial \nu} = \langle \nabla f, \nu\rangle$ die Richtungsableitung von f in Richtung ν.

Beweis:

(a) Wende den Satz von Gauß an auf $F := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (f an der i-ten Stelle).

div $F = \sum_{j=1}^{n} \partial_j F_j = \partial_i f$, $\langle F, \nu\rangle = \nu_i \cdot f$.

Also $\int_A \partial_i f = \int_{\partial A} \nu_i f\, dS$.

(b) Sei $F := f \cdot \nabla g - g\nabla f$, $F : U \to \mathbb{R}^n$. Es gilt div $(f\nabla g)$ = div $\begin{pmatrix} f\partial_1 g \\ \vdots \\ f\partial_n g \end{pmatrix}$ = $\sum_{i=1}^{n} \partial_i(f\partial_i g) = \sum_{i=1}^{n}(\partial_i f \cdot \partial_i g + f \cdot \partial_i^2 g) = \langle \nabla f, \nabla g\rangle + f \cdot \nabla g$.

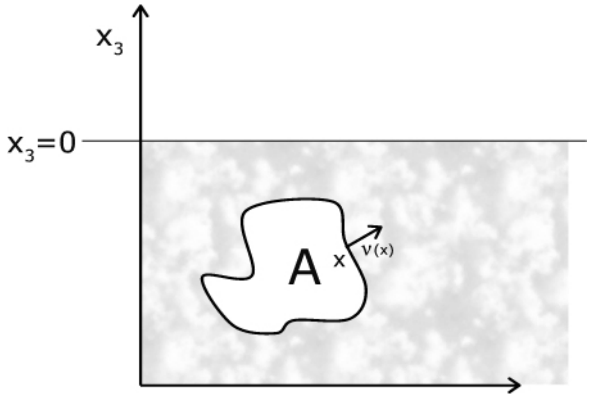
Damit div $F = \langle \nabla f, \nabla g\rangle + f \cdot \Delta g - \langle \nabla g, \nabla f\rangle - g \cdot \Delta f = f\Delta g - g\Delta f$.

Nach dem Satz von Gauß gilt

$\int_A (f\Delta g - g\Delta f)\, dx = \int_A \operatorname{div} F = \int_{\partial A} \langle F, \nu\rangle\, dS = \int_{\partial A} (f\langle \nabla g, \nu\rangle - g\langle \nabla f, \nu\rangle)\, dS = \int_{\partial A} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial \nu})\, dS$.

□

Beispiel 11.13 (Auftrieb)**.**
Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ ein fester Körper in einer Flüssigkeit mit konstanter Dichte $c > 0$. Die Flüssigkeit nehme den Bereich $x_3 \leq 0$ ein.



An der Stelle $x \in \partial A$ übt die Flüssigkeit einen Druck auf A der Größe $c \cdot x_3 \cdot \nu(x)$ aus (also wegen $x_3 < 0$ nach innen). Die Auftriebskraft ist gegeben durch

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}, K = \int\limits_{\partial A} c x_3 \nu(x)\, dS(x)$$

D.h. $K_i = \int\limits_{\partial A} \underbrace{c x_3 \nu_i(x)}_{Druck}\, \underbrace{dS(x)}_{Flche} = c \cdot \int\limits_A (\partial_i x_3)\, dx = c \cdot \begin{cases} 0 & \text{, für } i = 1,2 \\ \int\limits_A 1\, dx = \mu_3(A) & \text{, für } i = 3. \end{cases}$

Der Auftrieb ist also eine Kraft, die senkrecht nach oben geht und proportional zum Volumen von A ist.

c. Der Satz von Stokes

Im $\mathbb{R}^2$ lautet der Satz von Gauß für $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit glattem Rand und $F \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$:

$$\int_A (\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2)\,dx = \int_{\partial A} \langle F, \nu\rangle\; dS.$$

Hier ist ∂A eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit, d.h. $T_x(\partial A) = 1$.
Daher existiert genau ein Tangenten-Einheitsvektor $t : \partial A \to \mathbb{R}^2$ mit $|t(x)| = 1, \langle t(x), \nu(x)\rangle = 0$ und A ist links von $t(x)$.
Es ist $t(x) = \begin{pmatrix} -\nu_2(x) \\ \nu_1(x) \end{pmatrix}$, d.h. $\nu(x) = \begin{pmatrix} t_2(x) \\ -t_1(x) \end{pmatrix}$.
Somit $\int_{\partial A} \langle F, \nu\rangle\; dS = \int_{\partial A} (F_1 t_2 - F_2 t_1)\,dS$
Setze $V := \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$:
$\int_A (\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1)\,dx = \int_{\partial A} (V_1 t_1 + V_2 t_2)\,dS(x)$
Sei $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^2$ eine (globale) Karte von ∂A. Dann ist $t(\gamma(\tau)) = \frac{\gamma'(\tau)}{|\gamma'(\tau)|}$ (bei geeigneter Orientierung).
Damit $\int_{\partial A} (V_1 t_1 + V_2 t_2)\,dS = \int_{\partial A} \langle V, t\rangle\; dS$

$= \int_\alpha^\beta \langle V(\gamma(\tau)), t(\gamma(\tau))\rangle \cdot \underbrace{|\gamma'(\tau)|}_{\widehat{=}\sqrt{g(u)}}\; d\tau$ (nach Definition des Flächenintegrals)

$= \int_\alpha^\beta \langle V(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau)\rangle\; d\tau$ mit der 1-Form $\omega(x,h) = \langle V(x), h\rangle$ (d.h. $\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \langle V, dx\rangle$), wobei $\Gamma = [\gamma]$.
Definiere die Rotation im $\mathbb{R}^2$ durch $\operatorname{rot} V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \operatorname{rot} V := \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1$. Wir erhalten

Satz 11.14 (von Stokes im $\mathbb{R}^2$)**.**
Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit glattem Rand, $V \in C^1(U;\mathbb{R}^2)$ mit $U \supset A$ offen. Dann ist

$$\int_A \mathit{rot}\; V(x)\,dx = \int_{\partial A} \langle V(x),\, dx\rangle$$

Im $\mathbb{R}^3$: Für $V \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ war rot $V := \nabla \times V := \begin{pmatrix} \partial_2 V_3 - \partial_3 V_2 \\ \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3 \\ \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1 \end{pmatrix}$
Der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$ handelt von 2-dimensionalen Flächen.

$\nu_M(x)$: Normalenvektor zu M.
$\nu_A(x)$: Normalenvektor zu ∂A „auf M“.
$t(x)$: Tangenteneinheitsvektor zu ∂A.

Für $x \in \partial A$ bilden die Vektoren $\nu_M(x), \nu_A(x), t(x)$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$ (mit geeigneter Orientierung).

Ohne Beweis:

Satz 11.15. *von Stokes im $\mathbb{R}^3$*
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, $A \subset M$ kompakt mit glattem Rand ∂A. Sei $\nu_M : M \to \mathbb{R}^3$ ein Einheitsnormalenvektor auf M.
Für $V \in C^1(U;\mathbb{R}^3)$ mit $U \supset A$ offen gilt

$$\underbrace{\int_A \langle rot\ V(x), \nu_M(x)\rangle\ dS(x)}_{Flächenintegral} = \underbrace{\int_{\partial A} \langle V(x),\, dx\rangle}_{Kurvenintegral}$$

Bemerkung 11.16.

(a) Dabei ist $\int\limits_{\partial A} \langle V(x),\, dx\rangle = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \langle V(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau)\rangle\ d\tau$ für eine Parametrisierung $\gamma : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3$ von ∂A.

(b) Definiere die 1-Form $\omega(x,h) := \langle V(x), h\rangle$.
Dann ist

$$\int_{\partial A} \langle V(x),\, dx\rangle = \int_{\partial A} \omega$$

Man kann allgemein p-Formen ($p = 0, 1, \ldots, n$) definieren. Dabei sind 0-Formen Funktionen und 1-Formen wie gehabt.
Beachte: Für eine 0-Form f war df eine 1-Form.

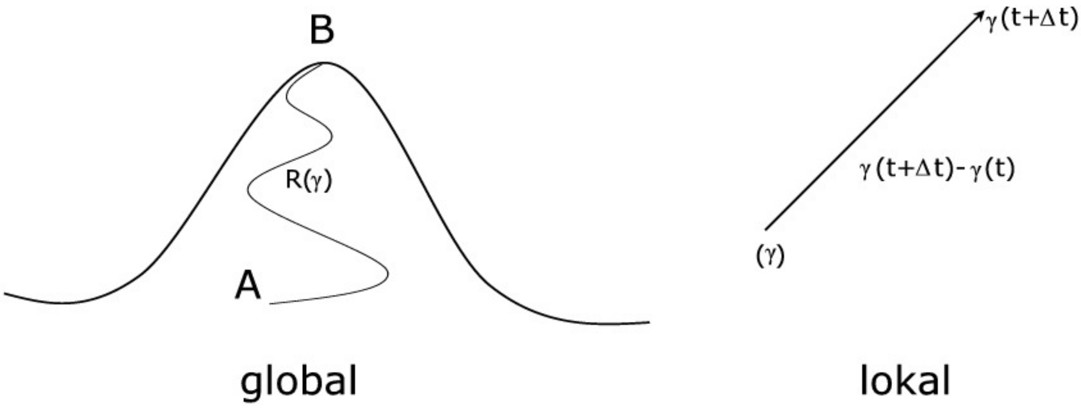
Allgemein kann man für eine p-Form ω die $(p+1)$-Form $d\omega$ definieren. Weiß man noch, wie man p-Formen integriert, so kann man die allgemeine Version des Satzes von Stokes für p-Formen beweisen:

$$\boxed{\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega}$$

12. Zusammenfassung

oder: Ich weiss nicht, was soll das bedeuten.

12.1 (Weglänge).
oder: Ich gehe spazieren. Wie lang ist der Weg von A nach B?



$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

In der Zeit von t bis $t + \Delta t$ lege ich eine Weglänge $|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)| \approx |\gamma'(t)| \cdot \Delta t$ zurück.

Summiere über t : Weglänge: $L([\gamma]) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)|\, dt$.

Weglänge ist unabhängig von der Art, wie der Weg durchlaufen wird ($\Rightarrow$ Äquivalenzklassen von Wegen = Kurven)

12.2 (Skalare Integrale über Kurven).
oder: Ich streue einen Weg mit Sand

$f(x)$: Menge an Sand, die ich an der Stelle $x = \gamma(t)$ pro Meter streue.
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
lokal: $\underbrace{f(\gamma(t))}_{\text{Menge pro Längeneinheit}} \cdot \underbrace{|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)|}_{\text{zurückgelegte Länge}}$

Global: $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \cdot \underbrace{|\gamma'(t)|}_{\text{Wurzel aus der Gramschen Determinante für } m=1} dt =: \int\limits_{R(\gamma)} f(x)\, dS(x)$ (Flächenintegral für 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten)

12.3 (Kurvenintegrale).
oder: Ich rolle einen Stein den Berg hinauf. - Wieviel Arbeit muss ich leisten?

$F(x)$: Kraft entgegengesetzt der Schwerkraft.
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Arbeit lokal: $\langle F(\gamma(t)), \gamma(t + \Delta t)\rangle \approx \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \cdot \Delta t$
Arbeit global: $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\ dt =: \int\limits_{[\gamma]} \langle F(x),\, dx\rangle = \int\limits_{[\gamma]} \omega$
mit der 1-Form $\omega = \langle F(x),\, dx\rangle$, d.h. $\omega(x, h) = \langle F(x), h\rangle$.

12.4 (Karten).
oder: Ich blase einen Luftballon auf.

bitte hier einen flachen (nicht aufgeblasenen) Luftballon vorstellen.
$U \subset \mathbb{R}^2$.
γ
bitte hier einen aufgeblasenen Luftballon vorstellen.
$M \subset \mathbb{R}^3$
zwei Karten (Vorder- und Rückseite) + eine (oder zwei) Karte, um die Schnittstelle offen zu überdecken.

Vergleiche auch gekrümmter Raum (allgemeine Relativitätstheorie)

12.5 (Flächeninhalt).
oder: Ich male einen (aufgeblasenen) Luftballon an - wie viel Farbe brauche ich?

lokal: Fläche von $\Delta u_1 \cdot e_1$ und $\Delta u_2 \cdot e_2$ (Rechteck) wird abgebildet auf Fläche von $\gamma(u + \Delta u_1 \cdot e_1) - \gamma(u)$ und $\gamma(u + \Delta u_2 \cdot e_2) - \gamma(u)$ (Parallelogramm).
Kleine Fläche (auf M): $\underbrace{|\gamma(u + \Delta u_1 e_1) - \gamma(u)|}_{\approx \partial_1\gamma(u)\cdot\Delta u_1} \cdot |\gamma(u + \Delta u_2 e_2) - \gamma(u)| \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{=\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$

$\approx |\partial_1\gamma(u)| \cdot |\partial_2\gamma(u)| \cdot \sqrt{1-\cos^2\alpha}\Delta u_1\Delta u_2 = \sqrt{|\partial_1\gamma(u)|^2 \cdot |\partial_2\gamma(u)|^2 - \langle\partial_1\gamma(u), \partial_2\gamma(u)\rangle^2} \cdot \Delta u_1 \Delta u_2$.

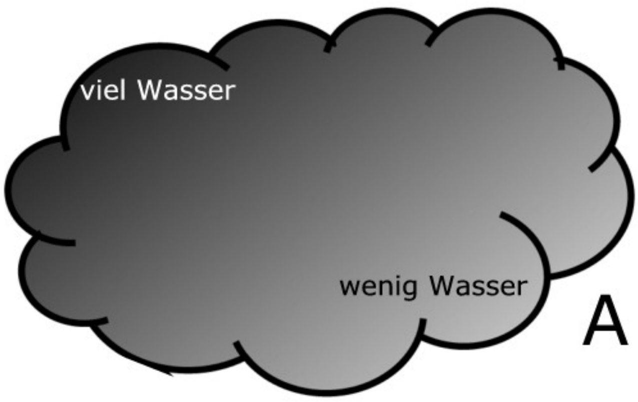
Beachte: $\gamma'(u)^t\gamma'(u) = \begin{pmatrix} \partial_1\gamma(u)^t \\ \partial_2\gamma(u)^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1\gamma(u) & \partial_2 g(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\partial_1\gamma, \partial_1\gamma\rangle & \langle\partial_1\gamma, \partial_2\gamma\rangle \\ \langle\partial_2\gamma, \partial_1\gamma\rangle & \langle\partial_2\gamma, \partial_2\gamma\rangle \end{pmatrix}$
und damit $\sqrt{\det g(u)} := \sqrt{\det(\gamma'(u)^t\gamma'(u))} = \sqrt{|pa_1\gamma|^2 \cdot |\partial_2\gamma|^2 - \langle\partial_1\gamma, \partial_2\gamma\rangle^2}$.

Summiere: $\mu_2(M) = \int\limits_U \sqrt{\det(\gamma'(u)^t\gamma'(u))}\, du =: \int\limits_M 1\, dS$.

(gilt für globale Karte, sonst Summe über Karten mit Partitionen der Eins)

12.6 (Volumen)**.**
oder: Ich schütte Wasser in einen Eimer (klar)

12.7 (Volumenintegral)**.**
oder: Wieviel Wasser ist ein einer Wolke?



$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x)$: Wasserdichte an der Stelle x.
$f(x)$: Anzahl der Wasserteilchen pro m^3.
lokal: $f(x) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$
global: $\int\limits_A f(x)\, dx$.

12.8 (Integrale über Flächen)**.**
oder: Ich bastle mir einen Gipskopf - wie viel Gips wird benötigt?

$f(x)$: Gipsmenge pro Fläche an der Stelle x.

lokal: $f(x) \cdot \Delta S(x)$
global: $\int\limits_U f(x)\, dS(x)$.

12.9 (Der Satz von Gauß)**.**
oder: Ich stehe im Regen

$F(x)$: Strömungsdichte an der Stelle x, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(a) Wieviel strömt durch die Oberfläche?
(alles pro fester Zeiteinheit)

lokal: $\langle F(x), \nu(x) \rangle\, \Delta S(x)$
global: $\int\limits_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle\; dS(x)$.

(b) Wieviel Flüssigkeit kommt innen dazu?
lokal: $\Big(\underbrace{F_1(x + \Delta x_1 e_1) - F_1(x)}_{\text{Differenz der Strömungsdichten}} \Big) \cdot \Delta x_2 \Delta x_3 \approx \partial_1 F_1(x) \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$.
Alle drei Richtungen: $\underbrace{(\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3)}_{=:\operatorname{div} F(x)} \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$

global: $\int\limits_A \operatorname{div} F(x)\, dx$.