Skript zur Vorlesung

Analysis III
Teil I - Differentialgleichungen

Wintersemester 2005/06

Universität Konstanz
Prof. Dr. Robert Denk

private Mitschrift

Stand: 14. Januar 2006
www.meidert.net/uni

Achtung:
Dies ist kein offizielles Skript, sondern nur eine private Mitschrift. Ich kann daher keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit übernehmen. Vor allem können die Nummerierungen zum Teil von den in den Vorlesungen verwendeten abweichen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so möge er/sie mir bitte eine eMail schicken - vielen Dank!

Frieder Meidert (uni@meidert.net)

Inhaltsverzeichnis

1. Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Worum geht's? 1.1.
$y' = \alpha y$, $dB = rB\,dt$ ($\Leftrightarrow \frac{dB}{dt} = rB$)
Anwendung: radioaktiver Zerfall ($\alpha < 0$)
Verzinsung ($r > 0$)

Genauer: $y'(t) = \alpha \cdot y(t) (t \in \mathbb{R})$

Varianten:
$y : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall)
$y : I \to \mathbb{R}^n, y : I \to \mathbb{C}^n$.

Es geht nicht um Funktionen $y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$!

Eine Lösung muss mindestens differenzierbar sein.

Fragen:

- Eindeutigkeit und Existenz einer Lösung?
- passt die Lösung zum Modell?
- wie kann ich die Lösung berechnen?
- wie lange in der Zeit existiert eine Lösung?
- hängt die Lösung stetig von den Daten ab?

Ein paar Beispiele:

(a) $y'(t) = \alpha y(t)$: Lösung z.B. 0, $e^{\alpha t}$, $2e^{\alpha t}$.
Falls man noch eine Anfangsbedingung $y(0) = 1$ kennt, ist $y(t) = e^{\alpha t}$ die einzige Lösung.
Man spricht von einem **Anfangswertproblem (AWP)**.

(b) Die Gleichung $y'' + y = 0$ hat die Lösungen $\sin t, \cos t$. Jede Lösung hat die Form $c_1 \sin t + c_2 \cos t$.
Die Menge der Lösungen ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von $C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.
Durch die Anfangsbedingung $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ wird die Lösung eindeutig (nämlich $\cos t$; $c_1 = 0, c_2 = 1$).

(c) Das AWP $y''(t) + \cos t \cdot y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ hat eine eindeutige Lösung, die aber nicht elementar berechenbar ist. Es handelt sich um die sogenannte **Hillsche Differentialgleichung** (Bewegung des Mondes, Stabilität der Mondbahn, Maschinenbau, etc.)
$\Rightarrow$ numerische Lösung.

(d) Das AWP $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ hat in $[0, \infty)$ unendlich viele Lösungen.

Definition 1.2.

(a) Eine (gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung der Form

$$f(t, \overbrace{\underbrace{y(t)}_{\in \mathbb{R}^n}, \ldots, y^{(k)}(t)}^{k+1}) = 0 \ (t \in I).$$

Dabei ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $y : I \to \mathbb{R}^n, t \mapsto y(t)$ eine unbekannte Funktion und $f : I \times \mathbb{R}^{(k+1)} \cdot n \supset D \to \mathbb{R}^m$ eine gegebene Funktion. Häufig schreibt man $f(t, y, \ldots, y^{(k)}) = 0$.

Falls f von $y^{(k)}$ wirklich abhängt, spricht man von einer **Differentialgleichung k-ter Ordnung**.
Falls $n > 1$ spricht man von einem **System von Differentialgleichungen**.
Falls $f(t, y, \ldots, y^{(k)}) = y^{(k)} - \widetilde{f}(t, \ldots, y^{(k-1)})$ heißt die Differentialgleichung **explizit**.
Falls f nicht von t abhängt, d.h. $f(t, y(t), \ldots, y^{(k)}(t)) = \widetilde{f}(y(t), \ldots, y^{(k)}(t))$, heißt die Differentialgleichung **autonom**.
Falls f linear ist bezüglich $y, y', \ldots, y^{(k)}$ heißt die Differentialgleichung **linear**.

(b) Ein **AWP** ist eine Differentialgleichung k-ter Ordnung, versehen mit einer Anfangsbedingung der Form $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1}$, wobei $t_0 \in I, y_0, \ldots, y_{k-1} \in \mathbb{R}^n$.

(c) Eine Lösung der Differentialgleichung $f(t, y(t), \ldots, y^{(k)}(t)) = 0$ ist eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ mit

(i) y ist k-fach differenzierbar in I,

(ii) $\forall\ t \in I$: $(t, y(t), \ldots, y^{(k)}(t)) \in D$,

(iii) $\forall\ t \in I$: $f(t, y(t), \ldots, y^{(k)}(t)) = 0$.

Beispiele 1.3.

1) $y'' + y = 0$: explizit, 2. Ordnung, linear, autonom
2) $y''(t) + \cos t y(t) = 0$: explizit, 2. Ordnung, linear, nicht autonom
3) $y''(t) + \sin(y(t)) = 0$: explizit, 2. Ordnung, nichtlinear, autonom
4) $(y')^2(t) + y^2(t) = 0$: nicht explizit (implizit), 1. Ordnung, nichtlinear, autonom

Zu impliziten Gleichungen siehe auch Satz über implizite Funktionen, der häufig eine *lokale* Auflösbarkeit liefert.

Bemerkung 1.4.

(a) (Rückführung auf ein System 1. Ordnung)
Betrachte die explizite Differentialgleichung k-ter Ordnung
$y^{(k)}(t) = F(t, y(t), \dots, y^{(k-1)}(t)), y : I \to \mathbb{R}^n$ (*)
Setze für $t \in I$:
$x_1(t) := y(t), x_2(t) := y'(t), \dots, {}_k(t) := y^{(k-1)}(t)$.
Dann ist y genau dann eine Lösung der Differentialgleichung k-ter Ordnung (*), falls $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^{k-n}$ Lösung ist von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ F(t, x_1(t), \dots, x_k(t)) \end{pmatrix}$$

(b) (Richtungsfelder)
Betrachte das skalare AWP $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0, y : I \to \mathbb{R}$.
An jeder Stelle $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ gibt $f(t, y)$ die Steigung der Lösung (Richtung) vor.

Satz 1.5 (von Picard-Lindelöf - globale Version).
Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt, $t_0 \in [a, b], y_0 \in \mathbb{R}^n$.
Sei $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer globalen Lipschitz-Bedingung genügt:

$$\exists\, L \geq 0 : \ \forall\, t \in I\ \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Dann existiert genau eine Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ des AWPs $y'(t) = f(t, y(t))$ $(t \in I)$, $y(t_0) = y_0$.

Beweis:

(i) Transformation in eine **Integralgleichung**: falls $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ eine Lösung ist, folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:
$$y(t) = \underbrace{y_0}_{=y(t_0)} + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds =: (Ty)(t) \qquad (*)$$
Ist andererseits $y \in C(I;\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (*) (d.h. von $Ty = y$), so folgt $y \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ und $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0$.
Beachte, dass (ab sofort) alle Integrale bzw. Ableitungen komponentenweise zu verstehen sind!

(ii) Anwendung des *Banachschen Fixpunktsatzes*:
Betrachte den linearen Operator $T : C(I;\mathbb{R}^n) \to C(I;\mathbb{R}^n), y \mapsto Ty$
Wir versehen $C(I;\mathbb{R}^n)$ mit einer neuen Metrik:
$d(g,h) := \sup_{t\in I} |e^{-(L+1)t}(g(t) - h(t))| \; (g, h \in C(I;\mathbb{R}^n))$.

Wegen $e^{-(L+1)b} \leq e^{-(L+1)t} \leq e^{-(L+1)a}$ sind die zugehörigen Normen zu d und zu $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent, also ist $(C(I;\mathbb{R}^n), d)$ vollständig.

Zu $x, y \in C(I;\mathbb{R}^n)$ ist $d(Tx, Ty) = \sup_{t\in I} e^{-(L+1)t} \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\, ds \right|$.
Für $t \geq t_0$ ist $e^{-(L+1)t} \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))\, ds \right|$
$\leq e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^{t} \left| f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \right| ds$
$\leq L \cdot e^{-(L+1)t} \int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|\, ds$
$= Le^{-(L+1)t} \int_{t_0}^{t} e^{(L+1)s} \underbrace{e^{-(L+1)s}|x(s) - y(s)|}_{\leq d(x,y)}\, ds$
$\leq L \cdot d(x,y) \cdot e^{-(L+1)t} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{(L+1)s}\, ds$
$\leq \frac{L}{L+1} d(x,y) e^{-(L+1)t}(e^{(L+1)t} - e^{(L+1)t_0}) \leq \frac{L}{L+1} d(x,y)$
Genauso für $t \leq t_0$. Somit $d(Tx, Ty) \leq \frac{L}{L+1} d(x,y)$, und wegen $\frac{L}{L+1} < 1$ ist T eine Kontraktion.
Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau ein Fixpunkt, d.h. ein $y \in C(I;\mathbb{R}^n)$ mit $Ty = y$.
(Gleichheit in $(C(I;\mathbb{R}^n), d)$ und damit für alle t)

□

Bemerkung 1.6.

(a) Für $y^{(k)} = F(t, y, \dots, y^{(k-1)})$, $y : I \to \mathbb{R}^n$ erhält man die eindeutige Lösbarkeit mit den Anfangsbedingungen $y(t_0) = y^0, y'(t_0) = y^1, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y^{k-1}$, wobei $y^0, \dots, y^{k-1} \in \mathbb{R}^n$. (vgl. 1.4).

(b) Mit dem wörtlich gleichen Beweis erhält man die analoge Aussage für Funktionen $y : I \to \mathbb{C}^n$.

Bemerkung 1.7.
Wir wissen sogar, dass für jedes $x^{(o)} \in C(I; \mathbb{R}^n)$ die Iteration $x^{(n+1)} := Tx^{(n)}$ gegen die Lösung konvergiert (+ a priori-Abschätzung). Numerisch gibt es aber bessere Verfahren (Euler-Verfahren, Runge Kutta-Verfahren, Adams-Verfahren).

Lemma 1.8 (Lemma von Gronwall)**.**
Sei $a > 0$ und $f, y \in C([0, a]; \mathbb{R})$, $f \geq 0$.

Für ein $b \in \mathbb{R}$ gelte: $y(t) \leq b + \int\limits_0^t y(s) f(s)\, ds$ $(t \in [0, a])$.

Dann gilt $y(t) \leq b \exp\left(\int\limits_0^t f(s)\, ds\right)$ $(t \in [0, a])$.

Beweis:
Zu $\varepsilon > 0$ definiere $z(t) := (b + \varepsilon) \exp\left(\int\limits_0^t f(s)\, ds\right)$.

Dann gilt: $z'(t) = f(t) z(t)$. Damit $z(t) = z(0) + \int\limits_0^t f(s) z(s)\, ds$.

Wir zeigen $y(t) < z(t)$ $(t \in [0, a])$ (*)
Für $t = 0$ ist dies klar. Angenommen, (*) gilt nicht für alle $t \in [0, a]$. Dann existiert ein minimales $t_0 \in (0, a]$ mit $y(t_0) = z(t_0)$ (beide Seiten sind stetig).

Es folgt $y(t_0) \leq b + \int\limits_0^{t_0} \underbrace{y(s)}_{\leq z(s)} \underbrace{f(s)}_{>0}\, ds < b + \varepsilon + \int\limits_0^{t_0} z(s) f(s)\, ds = z(t_0)$.

Dies ist ein Widerspruch zu $y(t_0) = z(t_0)$. Somit gilt (*). Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

□

Definition 1.9.
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$. Dann erfüllt f eine **lokale Lipschitz-Bedingung**, falls für alle $(t_0, x_0) \in D$ eine Umgebung $U(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

und ein $L(t_0, x_0)$ existiert mit
$\forall\ (t, x_1), (t, x_2) \in U(t_0, x_0) \cap D : |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(t_0, x_0) \cdot |x_1 - x_2|$.

Bemerkung 1.10.
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig.
(zu $(t_0, x_0) \in D$ wähle eine kompakte Umgebung V; dann sind alle Ableitungen auf V beschränkt; Rest mit Mittelwertsatz)

Satz 1.11.
(vgl. Forster II, S. 102)
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig [und stetig]. Seien $y_{1,2} : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von $y'(t) = f(t, y(t))$ in einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Falls $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, so folgt $y_1 = y_2$ in I.

Beweis:

(i) Wir zeigen: falls $y_1(a) = y_2(a)$ für ein $a \in I$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $y_1 = y_2$ in $[a, a + \varepsilon] \cap I$.
Sei $L = L(a, y_1(a))$ die lokale Lipschitz-Konstante von f.
Für $t \in [a, a + \varepsilon]$, ε klein:
$|y_1(t) - y_2(t)| = \left| \int\limits_a^t f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\, ds \right| \leq L \cdot \int\limits_a^t |y_1(s) - y_2(s)|\, ds$
Lemma von Gronwall (mit $b = 0, f(s) \equiv L, y(s) := |y_1(s) - y_2(s)|$) liefert $y_1(t) = y_2(t)$ für $t \in [a, a + \varepsilon]$.

(ii) Zeige $y_1 = y_2$ in $[t_0, \infty) \cap I$: sei $\tau := \sup\{t \in I : y_1 = y_2 \text{ in } [t_0, t]\}$. Falls $\tau = \infty$ oder τ das rechte Intervallende, sind wir fertig.
Angenommen, $\exists\ \delta > 0$ mit $[\tau, \tau + \delta] \subset I$. Da $y_{1,2}$ stetig sind, gilt $y_1(\tau) = y_2(\tau)$.
Nach (i) existiert $\varepsilon > 0$ mit $y_1 = y_2$ in $[\tau, \tau + \varepsilon]$, Widerspruch zur Definition von τ.

(iii) Für $t \in I, t \leq t_0$ analog oder mit Zeitumkehr: $z(t) := y(t_0 - t)$ ist genau dann eine Lösung von $z'(t) = -f(t, z(t))$ im Intervall $t_0 - I := \{t_0 - t : t \in I\}$, wenn y eine Lösung von $y' = f(t, y)$ in I ist.
Nach (ii) ist $z_1 = z_2$ in $[0, \infty) \cap (t_0 - I)$, d.h. $y_1 = y_2$ in $(-\infty, t_0] \cap I$.

□

Satz 1.12. *von Picard-Lindelöf (lokale Version)*
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. f erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung [1]*. Dann existiert zu $(t_0, y_0) \in D$ eine Umgebung $U(t_0, y_0)$, in welcher das AWP $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$, eine* eindeutige *stetig differenzierbare Lösung besitzt.*

Beweis:

(i) *Existenz der Lösung:*
Sei $(t_0, y_0) \in D, U(t_0, y_0)$ wie in Definition 1.9. Ohne Einschränkung sei $U(t_0, y_0) = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times V(y_0)$
Wähle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ $(:= \{\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) : \operatorname{supp} \varphi \text{ kompakt}\})$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset V(y_0), 0 \leq \varphi \leq 1, \varphi = 1$ in einer Umgebung $\widetilde{V}$ von y_0. Dann ist $F(t,x) := f(t,x) \cdot \varphi(x)$ global Lipschitz-stetig in $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \mathbb{R}^n$ wegen
$|\underbrace{F(t,x_1)}_{=0 \text{ für } x_1 \notin V(y_0)} - \underbrace{F(t,x_2)}_{=0 \text{ für } x_2 \notin V(y_0)}| \leq L(t_0, x_0) \cdot |x_1 - x_2|$ für $(t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon), x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n)$

Nach Satz 1.5 existiert $y \in C^1((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon); \mathbb{R}^n)$ mit $y'(t) = F(t, y(t)), y(t_0) = y_0$. Da $y(t_0) = y_0$ und y stetig, gilt $y(t) \in \widetilde{V} \subset V(y_0)$ für $|t - t_0|$ hinreichend klein. Wegen $\varphi = 1$ in $\widetilde{V}$ folgt $y'(t) = f(t, y(t))$ für $|t - t_0|$ klein. Somit existiert lokal eine Lösung.

(ii) *Eindeutigkeit* folgt sogar global nach Satz 1.11.

□

Beispiel 1.13.

(a) $y'(t) = t + y(t) =: f(t, y(t)), t \in \mathbb{R}$.
Wegen $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1 - y_2|$ ist f *global* Lipschitz-stetig.

(b) $y'(t) = t^2 + y^2(t), y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *nicht global* in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, aber *lokal* Lipschitz-stetig: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = \underbrace{|y_1 + y_2|}_{=L} \cdot |y_1 - y_2|$ (folgt auch aus Bemerkung 1.10)

(c) $y'(t) = (y(t))^{\frac{2}{3}}$, d.h. $f(t,x) = x^{\frac{2}{3}}, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f ist nicht lokal Lipschitz-stetig.
Hier ist die Lösung nicht eindeutig:

[1] Dies impliziert Stetigkeit bezüglich y $(y \mapsto f(t,y))$

Lösungen $y_0 \equiv 0, \varphi_a(t) := \frac{1}{27}(t-a)^3$ lösen beide $y' = y^{\frac{2}{3}}, y(a) = 0$.

Beachte:
f ist lokal Lipschitz-stetig in $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, jedoch erfüllt f in keiner Umgebung von $(a, 0)$ eine Lipschitz-Bedingung.

Satz 1.14 (Maximales Existenzintervall)**.**
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipschitz.stetig, $(t_0, y_0) \in D$.
Betrachte: $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0$. (*)
Dann existiert ein eindeutiges offenes Intervall I mit $t_0 \in I$ und $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n), y$ eine Lösung von (*), so dass gilt:
falls $\widetilde{y} \in C^1(\widetilde{I}; \mathbb{R}^n)$ (*) löst, so folgt $\widetilde{I} \subset I, y|_{\widetilde{I}} = \widetilde{y}$
*I heißt **maximales Existenzintervall** zu (*).*

Beweis:
Sei M die Menge aller offenen Intervalle $J \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in J$, für welche eine Lösung von (*) in J existiert.
Nach Picard Lindelöf ist M nicht-leer.
Seien $J_1, J_2 \in M$, y_1, y_2 zugehörige Lösungen, dann gilt $y_1 = y_2$ in $J_1 \cap J_2$ nach Satz 1.11.
Setze $I := \bigcup_{J \in M} J$. Dann ist I offen und ein Intervall [2] weil zu jedem $\in I$ ein $J \in M$ existiert mit $[t_0, t] \subset J$.
Definiere zu $t \in I$ die Lösung $yy(t) := \widetilde{y}(t)$, wobei $\widetilde{y}$ die Lösung in J mit $t \in J$.
(Die Eindeutigkeit der Lösung liefert die Wohldefiniertheit)
Die Aussagen des Satzes sind nach Konstruktion klar.

□

Satz 1.15 (Abschätzung der Lebensdauer)**.**
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig in einer Umgebung $U(t_0, y_0) \in D$. Es gelte $Q := [t_0, t_0 + h] \times [y_0 - c, y_0 + c] \subset U(t_0, y_0)$.
Dann ist die lokale Lösung y mindestens existent bis $t = \min\{h, \frac{c}{M}\} =: a$ mit $M := \max_{(t,x) \in Q} |f(t, x)|$. Es gilt $|y(t) - y_0| \leq c$, für $t \in [t_0, t_0 + h]$.

Beweis:
Definiere $F(t, x) := \begin{cases} f(t, y_0 + c) & , x > y_0 + c \\ f(t, x) & , y_0 - c \leq x \leq y_0 + c \\ f(t, y_0 - c) & , x < y_0 - c \end{cases}$ für $t \in [t_0, t_0 + h], x \in \mathbb{R}$.

[2] da $t_0 \in J$ für alle $J \in M$ und J zusammenhängend

Dann ist F global Lipschitz-stetig, und nach der Satz 1.5 besitzt das AWP $y' = F(t,y), y(t_0) = y_0$, eine eindeutige Lösung z.

Für $t - t_0 \le a$ ist $|z(t) - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} F(s, z(s))\, ds\right| \le M \cdot a \le c$.

Somit bleibt die Lösung z für $t \in [t_0, t_0 + a]$ im Quader Q. Dort ist aber $F = f$, d.h. z löst die ursprüngliche Differentialgleichung.

□

Satz 1.16 (Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten)**.**

(a) *Sei $f \in C([0,h] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und x, y die Lösungen von $x' = f(t,x), x(0) = x_0$, bzw. $y' = f(t,y), y(0) = y_0$. Sei $c := \frac{L}{L+1}$. Dann gilt:*

$$\sup_{t\in[0,h]} \left|e^{-(L+1)t}(x(t) - y(t))\right| \le \tfrac{|x_0 - y_0|}{1-c}.$$

(b) *Seien $f, g \in C([0,h] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_\infty < \infty$. f sei global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L.*
Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und x, y die Lösungen von $x' = f(t,x), x(0) = x_0$, bzw. $y' = g(t,y), y(0) = x_0$. Sei $c := \frac{L}{L+1}$. Dann gilt:

$$\sup_{t\in[0,h]} \left|e^{-(L+1)t}(x(t) - y(t))\right| \le \|f - g\|_\infty \tfrac{h}{1-c}.$$

Beweis:

(a) Sei $d(x,y) := \sup\limits_{t\in[0,h]} \left|e^{-(L+1)t}(x(t) - y(t))\right|$ wie im Beweis von 1.5. Wie dort gilt:

$$e^{-(L+1)t} \cdot |x(t) - y(t)| = e^{-(L+1)t} \cdot \left|x_0 - y_0 + \int_0^t (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\, ds\right|$$

$$\le |x_0 - y_0| + L \cdot \sup_{t\in[0,h]} e^{-(L+1)t} \cdot \int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds \le |x_0 - y_0| + c \cdot d(x,y).$$

$\Rightarrow d(x,y) \le \frac{|x_0 - y_0}{1-c}$.

(b) $x(t) - y(t) = \int_0^t (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\, ds + \int_0^t (f(s,y(s)) - g(s,y(s)))\, ds$

Damit $d(x,y) \le c \cdot d(x,y) + \|f - g\|_\infty \cdot h$, d.h. $d(x,y) \le \frac{h}{1-c} \cdot \|f - g\|_\infty$.

□

2. Spezielle Lösungsmethoden

Worum geht's? 2.1.
Hier geht's um Methoden, konkrete Differentialgleichungen zu lösen.
einige Typen von Differentialgleichungen sind lösbar, z.B. separable (separierte) Gleichungen, homogene Gleichungen, Potenzreihenansatz, exakte Differentialgleichungen.
Für lineare Differentialgleichungen: siehe nächster Abschnitt.

Warnung: die meisten (echt auftauchenden) Differentialgleichungen sind nicht analytisch lösbar.

a. Separable Gleichungen (Trennung der Variablen)

Hier nur eindimensional, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Differentialgleichung heißt separabel, falls sie von der Form
$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$ (*)
ist, d.h. $f(t, y) = g(t) \cdot h(y)$.

Satz 2.2.
Seien I, J Intervalle, offen, $g \in C(I; \mathbb{R})$, $h \in C(J; \mathbb{R})$, $h(x) \neq 0$ ($x \in J$).
Sei $(t_0, y_0) \in I \times J$. Setze $G(t) := \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau, H(x) := \int\limits_{y_0}^{x} \frac{dz}{h(z)}$.
Es gelte $G(I) \subset H(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ von (*) mit Anfangswert $y(t_0) = y_0$. Es gilt $H(y(t)) = G(t)$ für $t \in I$. (**)

Beweis:

(i) Sei y eine Lösung. Aus (*) + Anfangsbedingung folgt $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{y'(\tau)}{h(y(\tau))}\, d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau$.
Substituiere links $z := y(\tau)$, $dz = y'(\tau)\, d\tau$, d.h. die linke Seite ist $\int\limits_{y_0}^{y(t)} \frac{dz}{h(z)} =: H(y(t))$.
Damit folgt (**).

(ii) Wegen $H'(x) = \frac{1}{h(x)} \neq 0$ ist H streng monoton und damit bijektiv. Somit existiert die stetig differenzierbare Umkehrfunktion $H^{-1} : H(J) \to \mathbb{R}$. Für jede Lösung y gilt (**) und damit $y(t) = H^{-1}(G(t))$. D.h. die Lösung ist eindeutig.

(iii) Existenz: definiere y durch (**).
Dann ist y stetig differenzierbar mit $y(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = y_0$.
Differenziere (**): $\underbrace{H'(y(t))}_{=\frac{1}{h(y(t))}} \cdot y'(t) = g(t) \Rightarrow y$ löst (*).

$\square$

Beispiel 2.3.
$y' = y^2, y(0) = 1$. Schreibe die Aussage von Satz 2.2 symbolisch:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)\,dt + const}$$

Hier $g(t) = 1, h(x) = x^2$, d.h. $\frac{dy}{y^2} = 1 \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int 1 \cdot dt + const$

bzw. $\int\limits_{1\,(=y(0))}^{y} \frac{dz}{z^2} = \int\limits_{0\,(=t_0)}^{t} 1\,dt$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{y(t)} = t$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}$

b. Homogene Differentialgleichungen und Substitution

Beispiel 2.4. (Substitution)
$x'(t) = f(ax(t) + bt + c), a, b, c \in \mathbb{R}$.
Substituiere $y(t) := ax(t) + bt + c$
$\Rightarrow y'(t) = ax'(t) + b = a \cdot f(y) + b$. Diese Differentialgleichung ist autonom und damit separabel.

Beispiel 2.5 (Homogene Differentialgleichung)**.**
Homogene Differentialgleichungen haben die Form $x'(t) = f\left(\frac{x}{t}\right)$.
Substitution: $y(t) := \frac{x(t)}{t} \Rightarrow y'(t) = \frac{t \cdot x'(t) - x(t)}{t^2} = \frac{1}{t} \cdot (f(y(t)) - y(t))$, d.h. wieder separabel.

Beispiel 2.6 (Bernoullische Differentialgleichung)**.**
$x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot (x(t))^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Parameter.
$\alpha = 0$: lineare Differentialgleichung, siehe später.
$\alpha = 1$: separabel, siehe oben.
$\alpha \notin \{0, 1\}$: $y(t) := x(t)^{1-\alpha} \Rightarrow y'(t) = (1-\alpha)x(t)^{-\alpha}(a(t)x(t) + b(t)x(t)^\alpha) = (1-\alpha)(a(t)y(t) + b(t))$ - lineare Differentialgleichung.

Beispiel 2.7 (Riccatische Differentialgleichung)**.**
$x'(t) = k(t)x(t)^2 + g(t)x(t) + h(t), k, h, g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}), x(t_0) = x^0$.
$h = 0$: Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$.

(i) Transformation, falls eine Lösung p mit $p(t_0) =: p^0 \neq x^0$ bekannt ist:
Ansatz: $y := x - p \Rightarrow y(t_0) = x^0 - p^0$ und $y' = x' - p' = kx^2 + gx + h - kp^2 - gp - h = ky^2 - 2kp^2 + 2kxp + gx - gp = ky^2 + 2kpy + gy$.
Im Vergleich zur ursprünglichen Gleichung fehlt hier der „konstante" Term $h(t)$, d.h. wir haben eine Bernoulli-Differentialgleichung für y.

(ii) Rückführung auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (ohne eine spezielle Lösung zu kennen):
$u(t) := \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} k(s)x(s)\,ds\right) \Rightarrow u'(t) = -k(t)x(t)u(t)$.
$\Rightarrow u'' = k^2x^2u - k'xu - kux' = k^2x^2u - k'xu - ku(kx^2 + gx + h) =$
$k^2x^2u - k'xu - k^2x^2u - kugx - kuh = \frac{k'}{k}u' + gu' - khu$.

Damit löst u das AWP $u'' = \left(\frac{k'}{k} + g\right)u' - khu$, $u(t_0) = 1$, $u'(t_0) = -k(t_0)x^0$.
Dies ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

c. Potenzreihenansatz

Hier nur Differentialgleichungen 2. Ordnung

$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = s(t)$, $y(t_0) = y^0, y'(t_0) = y^1$. Die Koeffizienten a, b, s seien in einem offenen Intervall $J := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ in eine Potenzreihe um t_0 entwickelbar.
Z.B. $a(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n$.
Ansatz: $y(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(t - t_0)^n$, c_n unbekannt.
Man leitet y ab und setzt in die Differentialgleichung ein. Man erhält eine Rekursionsformel für $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Beachte, dass eine Potenzreihe im Inneren des Konvergenzkreises unendlich oft differenzierbar ist.

Beispiel 2.8 (Hermitesche Differentialgleichung)**.**
$y''(t) + 2ty'(t) + \lambda y(t) = 0$ (*)
mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.
(Koeffizienten sind Polynome, also ist alles bestens)
Ansatz: $y(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k \Rightarrow y'(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cdot k \cdot t^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)t^k$,
$y''(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}t^k$
In (*) eingesetzt: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}t^k - 2\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)t^{k+1}}_{=\sum_{k=0}^{\infty} c_k k t^k} + \lambda \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k = 0.$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen (Koeffizientenvergleich) müssen links alle Koeffizienten verschwinden:
$2c_2 + \lambda c_0 = 0$
$(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k + \lambda c_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.
Die Koeffizienten c_0 und c_1 sind frei wählbar (bzw. durch die Anfangsbedingungen festgelegt), die anderen Koeffizienten folgen aus der Rekursion.

$$\boxed{c_{k+2} = \frac{2k-\lambda}{(k+2)(k+1)} c_k \text{ für } k \in \mathbb{N}_0}$$

Sei nun $\lambda = 2n_0 \in 2\mathbb{N}$. Dann ist $c_{k+2} = 0$ für alle $k = 2n_0, 2n_0 + 2, \ldots$.
In diesem Fall existiert ein Polynom, welches die Differentialgleichung löst.
Z.B. $\lambda = 4$: wähle $c_1 := 0$ ($\Rightarrow c_3 = c_5 = \ldots = 0$), $c_0 := 1$

$\Rightarrow c_2 = \frac{-4}{2} \cdot c_0 = -2, c_4 = c_6 = \ldots = 0.$
Also ist $y(t) = 1 - 2t^2$ eine Lösung von (*) mit $\lambda = 4$.
Man erhält (bis auf Normierung) die Hermite-Polynome $H_n(t)$.

Das ist der Startpunkt für die Theorie orthogonaler Polynome (man studiere die Bücher!)

d. Exakte Differentialgleichungen

*Ab sofort verwenden wir den Begriff **Gebiet**: Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, falls sie offen und zusammenhängend ist.*

Definition 2.9.
Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f_1, f_2 \in C(G; \mathbb{R})$. Dann heißt die Differentialgleichung
$f_1(t, y(t)) + f_2(t, y(t)) \cdot y'(t) = 0$ (*)
exakt, falls eine Stammfunktion $F : G \to \mathbb{R}$ (stetig differenzierbar) existiert mit $\nabla F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

Bemerkung 2.10.
Definiere die 1-Form $\omega(x, h) := f_1(x)h_1 + f_2(x)h_2 = f_1(x)\, dx_1(h) + f_2(x)\, dx_2(h)$ für $x \in G, h \in \mathbb{R}^2$. Dann ist (*) genau dann exakt, wenn ω exakt ist.

Formal erhält man ω durch die Umformung [$x \cong (t, y)$]

$$\boxed{f_1(t, y)\, dt + f_2(t, y)\, dy = 0}$$

Dies ist die „symmetrische Version“ von (*).

Satz 2.11.

(a) *Die Differentialgleichung (*) sei exakt mit Stammfunktion F, $y : J \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Es gelte $(t, y(t)) \in G$ für $t \in J$. Dann ist y genau dann eine Lösung von (*), falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $F(t, y(t)) = c$ für $t \in J$;*

(b) *Sei G sternförmig, $f_1, f_2 \in C^1(G)$. Dann ist (*) genau dann exakt, falls $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$.*

Beweis:

(a) folgt aus $\frac{d}{dt}F(t, y(t)) = \underbrace{f_1(t, y(t)) \cdot 1}_{\partial_1 F(t, y(t))} + f_2(t, y(t)) \cdot y'(t)$.

(b) folgt aus dem bekannten Kriterium für die Exaktheit von 1-Formen.

□

Beispiel 2.12.
$(3t^2 + 4ty(t)) + (2t^2 + 3y(t)^2) \cdot y'(t) = 0.$
Hier ist $f_1(t,x) = 3t^2 + 4tx$, $f_2(t,x) = 2t^2 + 3x^2$.
$\partial_2 f_1 = 4t, \partial_1 f_2 = 4t \Rightarrow$ die Differentialgleichung ist exakt.

Wähle $(t_0, y^0) := (0,0)$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit $\Gamma_1 = [\gamma_1], \Gamma_2 = [\gamma_2]$ mit $\gamma_1 : [0,t] \to \mathbb{R}^2, s \mapsto (s,0)$, $\gamma_2 : [0,x] \to \mathbb{R}^2, s \mapsto (t,s)$
Dann ist $F(t,x) = \int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma_1} \omega + \int\limits_{\Gamma_2} \omega =$
$= \int\limits_0^t (3s^2 + 4s \cdot 0) \cdot 1\, ds + \int\limits_0^x (2t^2 + 3s^2) \cdot 1\, ds = t^3 + 2t^2 x + x^3.$

Die Lösung der Differentialgleichung erhält man durch (lokale) Auflösung von $F(t, y(t)) = c$,
d.h. $t^3 + 2t^2 y(t) + y(t)^3 = c$.

3. Lineare Differentialgleichungen

Worum geht's? 3.1.
Lineare Differentialgleichungen sind eine wichtige Klassen von Differentialgleichungen, bei welcher vieles einfacher ist (z.B. Lösbarkeit). Hier kommt die Lineare Algebra ins Spiel (z.B. Jordan-Normalform).

a. Homogene lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen haben die Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{*}$$

$y(t_0) = y^0$. Homogen: $b = 0$.
Dabei ist $A \in C(J; \mathbb{C}^{n\times n}), b \in C(J; \mathbb{C}^n), y^0 \in \mathbb{C}^n, t_0 \in J, J \subset \mathbb{R}$ ein (beliebiges) Intervall.

Lösung ist $y : J \to \mathbb{C}^n$, y differenzierbar, mit (*) für alle $t \in J$.
Beachte: falls y eine Lösung ist, folgt aus (*): $y \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$.
Wir wählen (meist) die euklidische Norm $|\cdot|$ auf $\mathbb{C}^n$ und die Operatornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Satz 3.2.
Unter obigen Voraussetzungen existiert zu jedem $t_0 \in J$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ genau ein $y \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$, welches (*) löst.

Beweis:
Falls J kompakt ist, folgt dies aus Satz 1.5 (Picard-Lindelöf), denn für $f(t,x) := A(t) + b(t)$ gilt $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |A(t)(x_2 - x_1)| \leq \underbrace{\sup_{t\in J} \|A(t)\|}_{=:L<\infty} \cdot |x_2 - x_1|$.

Falls J nicht kompakt ist, kann man J durch kompakte Intervalle ausschöpfen und erhält die eindeutige Lösbarkeit in J. □

Korollar 3.3.

(a) In der Situation von Satz 3.2 sei $t_0 \in J$ fest. Dann definiert
$T : C^1(J;\mathbb{C}^n) \to C(J;\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n,\ y \mapsto \begin{pmatrix} y' - Ay \\ y(t_0) \end{pmatrix}$
einen Vektorraumisomorphismus.

(b) Sei $H : C^1(J;\mathbb{C}^n) \to C(J;\mathbb{C}^n)$, $y \mapsto y' - Ay$ und $\ker(H) := \{y \in C^1(J;\mathbb{C}^n) : Hy = 0\}$. Dann ist $\ker(H) \to \mathbb{C}^n, y \mapsto y(t_0)$, ein Vektorraumisomorphismus.
Insbesondere ist $\dim(\ker(H)) = n$.

Beweis:
Die Linearität ist jeweils klar, die Injektivität und Surjektivität folgt jeweils aus Satz 3.2.

□

Satz 3.4.
Es existieren genau n linear unabhängige Lösungen in $C^1(J;\mathbb{C}^n)$ von $y'(t) = A(t)y(t)$.
Ein System $\{z_1, \dots, z_n\}$ von Lösungen ist genau dann eine Basis, falls die Vektoren $\{z_1(t_0), \dots, z_n(t_0)\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ ist.

Beweis:
folgt sofort aus Korollar 3.3.

□

Definition 3.5.

(a) Sei $\{z_1, \dots, z_n\}$ ein System von Lösungen von $y' = Ay$. Dann heißt die aus den Spalten $z_1, \dots, z_n$ gebildete Matrix $Z := (z_1, \dots, z_n) : J \to \mathbb{C}^{n \times n}$ die **Wronski-Matrix** und $\det(Z) : J \to \mathbb{C}$ die **Wronski-Determinante** ($\det(W)$).

(b) Eine Basis $\{z_1, \dots, z_n\}$ des Lösungsraums von $y' = Ay$ heißt ein **Fundamentalsystem**. In diesem Fall heißt die Wronski-Matrix eine **Fundamentalmatrix**.

Bemerkung 3.6.

(a) Damit haben wir: seien $\{z_1, \dots, z_n\}$ Lösungen von $y' = Ay$. Dann ist $\{z_1, \dots, z_n\}$ genau dann ein Fundamentalsystem, falls $\det(W(t)) \neq 0$ für alle $t \in J \Leftrightarrow \det(W(t_0)) \neq 0$ für ein $t_0 \in J$.

(b) Die Wronski-Matrix löst die Matrizen-Differentialgleichung

$$\boxed{Z'(t) = A(t)Z(t)}$$

Falls Z eine Fundamentalmatrix ist, so ist eine Funktion $z \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$ genau dann eine Lösung von $y' = Ay$, falls ein $c \in \mathbb{C}^n$ existiert mit $\boxed{z(t) = Z(t)\cdot c \text{ für } t \in J}$ (Linearkombination der Spalten von $Z(t)$).

Satz 3.7. *(Formel von Liouville)*
Die Wronski-Determinante $W(t) := \det(Z(t))$ *ist differenzierbar mit* $w'(t) = (tr(A(t)))\cdot w(t)$ *und damit*

$$\boxed{w(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} tr(A(s))\,ds\right)}$$

Beweis:
O.E. sei $w(t) \neq 0$ für $t \in J$ (für $w = 0$ trivial).
Ähnlichkeitstranformation:
$(b_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n} := B(t) := Z(t)^{-1}A(t)Z(t)$.
Damit $Z'(t) = A(t)Z(t) = Z(t)B(t)$.
$\Rightarrow z_j'(t) = (Z(t)e_j)' = Z'(t)e_j = Z(t)B(t)e_j = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{kj}(t)z_k(t)$.

$$w(t)' = (\det(z_1(t),\dots,z_n(t)))' = \sum_{j=1}^{n}\det(z_1(t),\dots,z_j'(t),\dots,z_n(t))$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{kj}(t)\det(z_1(t),\dots,z_k(t),\dots,z_n(t))$$
$$= \sum_{j=1}^{n} b_{jj}(t)\underbrace{\det(z_1(t),\dots,z_j(t),\dots,z_n(t))}_{=w(t)}$$
$$= w(t)\sum_{j=1}^{n} b_{jj}(t) = w(t)\mathrm{tr}(B(t)) = w(t)\mathrm{tr}(A(t) \qquad \text{(wegen } B = Z^{-1}AZ)$$

Damit (Differentialgleichung mit getrennten Variablen):
$$w(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}(A(s))\,ds\right).$$

□

b. Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Betrachte $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$ (*)

Lemma 3.8.
Sei $y_p \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$ eine spezielle (partikuläre) Lösung von (*), $Z \in C^1(J;\mathbb{C}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix.
Dann ist die allgemeine Lösung von (*) gegeben durch

$$y(t) = y_p(t) + Z(t)\cdot c \text{ für } c \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis:
Wegen $y' = y_p' + (Z\cdot c)' = y_p' + Z'\cdot c = Ay_p + b + AZc = Ay + b$ ist jedes solche y eine Lösung von (*).
Ist andererseits y eine Lösung von (*), so löst $z := y_p - y$ die Differentialgleichung $z' = y_p' - y' = Ay_p + b - Ay - b = A(y_p - y) = Az$,
d.h. $z' = Z\cdot c$ mit einem $c \in \mathbb{C}^n$ (Bemerkung 3.6 (b)).

□

Satz 3.9. *(Variation der Konstanten)*
Sei $Z \in C^1(J;\mathbb{C}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Differentialgleichung $y' = Ay$.
Dann erhält man eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = Ay + b$ durch den Ansatz
$\boxed{y_p(t) = Z(t)\cdot c(t)}$, *wobei $c \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$ eine Lösung von $Z(t)\cdot c'(t) = b(t)$ ist, d.h.*

$$\boxed{c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Z(s)^{-1} b(s)\, ds}. \qquad (**)$$

Beweis:
$(Z(t)c(t))' = Z'(t)c(t) + Z(t)c'(t) = A(t)Z(t)c(t) + b(t) = A(t)y_p(t) + b(t)$.
Beachte: $Z(t)c'(t) = b(t) \Leftrightarrow$ (**) (da Z invertierbar)

□

Beispiel 3.10.
$y_1'(t) = -y_2(t)$, $y_2'(t) = y_1(t) + t$.
In Matrixschreibweise: $y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{=b(t)}$

Fundamentalmatrix: $Z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

Variation der Konstanten: $Z(s)^{-1}b(s) = \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot \sin s \\ s \cdot \cos s \end{pmatrix}$.

$c(t) = c(0) + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} s \cdot \sin s \\ s \cdot \cos s \end{pmatrix} ds$

$= \underbrace{c(0)}_{:=0} + \begin{pmatrix} -s\cos s + \sin s \\ s \sin s + \cos s \end{pmatrix} \Big|_{s=0}^{s=t}$.

Spezielle Lösung: $y_p(t) = Z(t)c(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t\cos t + \sin t \\ t \sin t + \cos t - 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -t\cos^2 t + \sin t \cos t - t \sin^2 t - \sin t \cos t + \sin t \\ -t \sin t \cos t + \sin^2 t + t \sin t \cos t + \cos^2 t - \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t + \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$.

Die allgemeine Lösung hat die Form $y(t) = y_p(t) + Z(t) \cdot d$, $d \in \mathbb{C}^2$.

c. Systeme mit konstanten Koeffizienten

$y'(t) = Ay(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ (*), $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

skalarer Fall:
$y'(t) = \alpha y(t) \Rightarrow y(t) = e^{\alpha t} y(0)$.
Wir betrachten die euklidische Norm $|\cdot|$ auf $\mathbb{C}^n$ und die zugehörige Operatornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^{n \times n}$. Beachte, dass $\|\cdot\|$ submultiplikativ ist, d.h.

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \text{ für } A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Definition 3.11.
Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ die **Exponentialfunktion**.

Satz 3.12.

(a) *Die* exp*-Reihe ist **normkonvergent**, d.h.* $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| < \infty$*, und damit konvergent. Es gilt* $\exp(0) = I_n$ *($n \times n$-Einheitsmatrix),* $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

(b) *Für* $A, B \in \mathbb{C}^n$ *mit* $AB = BA$ *ist* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

(c) *Damit* $Z(t) := \exp(tA)$ *für* $t \in \mathbb{R}$ *ist die eindeutige Lösung der Matrizen-Differentialgleichung* $Z'(t) = A(t)Z(t), Z(0) = I_n$*. Eine Funktion* $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ *ist genau dann eine Lösung von (*), falls ein* $c \in \mathbb{C}^n$ *existiert mit* $y(t) = Z(t)c$*, für* $t \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Klar aus Übungsaufgabe ... - vgl. LA I.

□

Wir erinnern an den Satz von der Jordan-Normalform: $J_p(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

sei ein Jordan-Kästchen zu λ der Dimension p.
Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann existiert ein $S \in GL(n, \mathbb{C})$ mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J(\lambda_1) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J(\lambda_l) \end{pmatrix}$$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A und $J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_1), J(\lambda_2), \dots, J(\lambda_2), \dots J(\lambda_l), \dots, J(\lambda_l)$ die Jordan-Kästchen geeigneter Dimension sind. Dies ist eine Darstellung der Form $S^{-1}AS = D + N$, wobei D eine Diagonalmatrix und N nilpotent ist mit $DN = ND$. Dabei ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$. N hat in der ersten Nebendiagonale nur die Werte 0 und 1, alle anderen Einträge sind 0.

Es ist $S^{-1}tAS = tD + tN$ und $S^{-1}\exp(tA)S = \exp(S^{-1}tAS) = \exp(tD + tN) = \exp(tD)\exp(tN)$, d.h. $\exp(tA) = S\exp(tD)\exp(tN)S^{-1}$.

Zu einem Jordankästchen $J_p(\lambda)$ der Dimension p zu einem Eigenwert λ sind die zugehörigen Hauptvektoren $h_1, \dots, h_p$ definiert durch $(A - \lambda I_n)h_j = h_{j-1}$ für $j = 1, \dots, p$, $h_0 := 0$.
Die Transformationsmatrix S wird aus allen Hauptvektoren gebildet: $Se_j = h_j$.
Aus $S^{-1}A\underbrace{Se_j}_{h_j} = \lambda e_j + e_{j-1}$ folgt $Ah_j = \lambda h_j + h_{j-1}$.

Satz 3.13.
Sei h_j der Hauptvektor der Stufe j zum Eigenwert λ der Matrix A.
Dann ist $y_j(t) := e^{\lambda t}(h_j + th_{j-1} + +\frac{t^2}{2}h_{j-2} + \dots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}h_1)$ für $j = 1, \dots, p$ eine Lösung der Differentialgleichung (*).
Das System aller so gebildeten Lösungen (zu allen Jordan-Kästchen) bildet ein Fundamentalsystem von (*).

Beweis:
Wir wissen $\exp(A)$ ist eine Fundamentalmatrix. Für jedes $S \in GL(n, \mathbb{C})$ ist $Y(t) := \exp(tA)S$ ebenfalls eine Fundamentalmatrix. *(denn: $Y'(t) = A\exp(tA)S = AY(t)$, $\det Y(0) = \det S \neq 0$)*
Wir verwenden das S aus dem Satz von der Jordan-Normalform. Zur Vereinfachung der Schreibweise besitze A nur ein Jordan-Kästchen, d.h. $\exp(tA)S = S\exp(tD)\exp(tN)$ mit $D = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Damit $\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda} \end{pmatrix} = e^{t\lambda} I_n$. $N^p = 0$.

$$\exp(tN) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tN)k}{k!} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(tN)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit $S\exp(tD)\exp(tN) = e^{\lambda t} S \exp(tN) = e^{\lambda t}(h_1, \dots, h_p) \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

$= e^{\lambda t}\left(h_1, h_2 + th_1, \dots, h_p + th_{p-1} + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} h_1\right)$

□

Beispiel 3.14.
$y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((2-\lambda)(-\lambda)+1) = -(\lambda-1)^3$.

Also ist 1 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3. Die geometrische Vielfachheit ist 2.

Linear unabhängige Eigenvektoren sind z.B. $h_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, h_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt außerdem $(A - 1 \cdot I)h_2^{(1)} = h_1^{(1)}$ für $h_2^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für $S := (h_1^{(1)},, h_2^{(2)}, h_1^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Jede Lösung der Differentialgleichung hat die Form

$$y(t) = c_1 e^t h_1^{(1)} + c_2 e^t (h_2^{(1)} + t h_1^{(1)}) + c_3 e^t h_2^{(1)}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$$

d. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_k x(t) = 0 \qquad (*), a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}, x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Setze: $y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_k & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.$

Damit $y' = Ay$ äquivalent zu (*).

Satz 3.15.

(i) Das charakteristische Polynom von A ist $P_A(t) := \det(tI_n - A) = t^k + a_1 t^{k-1} + \ldots + a_{k-1} t + a_k$.

(ii) Sei λ eine p-fache Nullstelle von P_A. Dann sind $x_1(t) := e^{\lambda t}, x_2(t) := te^{t\lambda}, \ldots, x_p := t^{p-1}e^{t\lambda}$ linear unabhängige Lösungen von (*). Betrachtet man diese für alle Nullstellen von P_A, so erhält man ein Fundamentalsystem.

Beweis:

(i) z.B. mit Induktion - vgl. LA I.

(ii) Wir konstruieren explizit eine Kette von Hauptvektoren:

sei $c(\mu) := \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \\ \vdots \\ \mu^{k-1} \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}.$

Sei $h_j := \frac{1}{(j-1)!} c^{(j-1)}(\lambda)$. Es gilt:

$$Ac(\mu) = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu^2 \\ \vdots \\ \mu^{k-1} \\ mu^k - P_A(\mu) \end{pmatrix} = \mu \cdot c(\mu) - P_A(\mu) e_k.$$

Leite j-mal nach μ ab: $Ac^{(j)}(\mu) = \mu c^{(j)}(\mu) + jc^{(j-1)}(\mu) - P_A^{(j)}(\mu) e_k$.

Sei λ eine p-fache Nullstelle von P_A, d.h. $P_A(\lambda) = \ldots = P_A^{(p-1)}(\lambda) = 0$.
Dann gilt $(A-\lambda)c^{(j)}(\lambda) = jc^{(j-1)}(\lambda)$ $(c^{(-1)} := 0)$ für $j = 0, \ldots, p-1$.
Für h_j folgt $(A-\lambda)h_j = h_{j-1}$ $(h_0 := 0)$ für $j = 1, \ldots, p$.
D.h. $h_1, \ldots, h_p$ ist eine Kette von Hauptvektoren, und $y_j(t) := e^{\lambda t}(h_j + th_{j-1} + \ldots + fract^{j-1}(j-1)!h_1)$ für $j = 1, \ldots, p$ sind linear unabhängige Lösungen von $y' = Ay$.

Wir brauchen die ersten Komponenten: es ist die erste Komponente von h_j gleich 0 für $j \geq 2$. Damit $x_j(t) = e^{\lambda t} \cdot \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}$ für $j = 1, \ldots, p$.
Das ist (bis auf Normierung) die Behauptung.

□

Bei speziellen Inhomogenitäten lässt sich die Lösung explizit angeben.

Satz 3.16.
Betrachte $x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_k x(t) = t^s e \lambda t$ *(*)*
mit $s \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{C}$.
Sei λ eine p-fache Nullstelle von P_A mit $p \in \mathbb{N}_0$, d.h. $P_A(\mu) = (\mu-\lambda)^p \psi(\mu)$ *mit* $\psi(\lambda) \neq 0$.
Dann ist $x(t) := \frac{s!}{(p+1)!} \frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}} \left(\frac{e^{\mu t}}{\psi(\mu)} \right) |_{\mu=\lambda}$ *eine partikuläre Lösung von (*).*

Beweis:
Betrachte den Differentialoperator $L : C^k(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \to C(\mathbb{R}; \mathbb{C}), u \mapsto u^{(k)} + a_1 u^{(k-1)} + \ldots + a_k u =: P_A(D)u$ mit $P_A(D). = \delta^k + a_1 D^{k-1} + \ldots + a_k D^0$, $D := \frac{d}{dt}$.

Für $f(t) := e^{\mu t}, \mu \in \mathbb{C}$, gilt offensichtlich $(Lf)(t) = (P_A(D)f)(t) = P_A(\mu)f(t) = (\mu - \lambda)^p \psi(\mu) f(t)$.
Damit $L(\frac{1}{\psi(\mu)} f)(t) = (\mu-\lambda)^p e^{\mu t}$.
Wir differenzieren die letzte Gleichung $(p+s)$-mal an der Stelle $\mu = \lambda$:
$$\frac{\partial^j}{\partial \mu^j}(\mu-\lambda)^p |_{\mu=\lambda} = \begin{cases} 0 & , falls\ j \neq p \\ p! & , falls\ j = p \end{cases}$$
Produktregel: $(Lx)(t) = \frac{s!}{(p+s)!} L \left[\frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}} \frac{e^{\mu t}}{\psi(\mu)} |_{\mu=\lambda} \right] =$
$= \frac{s!}{(p+s)!} \frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}} \left((\mu-\lambda)^p e^{\mu t} \right) \Big|_{\mu=\lambda} =$
$\frac{s!}{(p+s)!} \binom{p+s}{p} p! t^s e^{\mu t} = t^s e^{\mu t}$.

□

Bemerkung 3.17. (Leibniz-Formel)
Im letzten Beweis wurde die Produktregel gleich für höhere Ableitungen verwenden. Dies ist die Leibniz-Formel:
seien f, g n-fach differenzierbar. Dann

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

(Beweis durch Induktion)

Bemerkung 3.18.
Bei Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten führt der bisherige Ansatz im Allgemeinen auf komplexwertige Lösungen. Falls y eine Lösung von $y' = Ay$ ist, so ist (für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) auch $Re(y), Im(y)$ eine Lösung.
$e^{\lambda t} = e^{(Re\lambda)t}(\cos((Im(\lambda))t) + i\sin((Im(\lambda))t))$.
Man erhält also cos- und sin- Terme. Analog für Systeme bzw. Gleichungen höherer Ordnung.

Beispiel 3.19.
$x^{(4)}(t) - 2x^{(2)}(t) + x(t) = 24t\sin t$.

(i) Fundamentalsystem der homogenen Gleichung:
$\psi_A(\mu) = \mu^4 - 2\mu^2 + 1 = (\mu+1)^2(\mu-1)^2$.
$\Rightarrow$ Fundamentalsystem: $e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}$.

(ii) Übergang ins Komplexe: $\sin t = Im e^{it}$, also betrachte die rechte Seite te^{it}:
hier ist $\lambda = i, s = 1, p = 0$ (also $P_A = \psi$).

(iii) Bestimmung einer partikulären Lösung:
Nach Satz 3.16 ist $x_0(t) := \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{e^{\mu t}}{\psi(\mu)}\right)\Big|_{\mu=\lambda} =$
$= \frac{\psi(\mu)\mu e^{\mu t} - \psi'(\mu)e^{\mu t}}{\psi(\mu)^2}\Big|_{\mu=\lambda} = \frac{(\mu^4-2\mu^2+1)te^{\mu t}-(4\mu^3-4\mu)e^{\mu t}}{(\mu^4-2\mu^2+1)^2}\Big|_{\mu=i} = \frac{t+2i}{4}e^{it}$ eine spezielle Lösung für die rechte Seite te^{it}. Somit ist $24x_0(t)$ eine Lösung für die rechte Seite $24te^{it}$.

(iv) Rückkehr zum Reellen: $Im(24x_0(t))$ ist eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.
$24x_0(t) = 24\frac{t+2i}{4}(\cos t + i\sin t) = (6t\cos t + 12\sin t) + i(6t\sin t + 12\cos t)$. Also ist $6t\sin t + 12\cos t$ eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.

(v) Allgemeine Lösung:
$x(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4te^{-t} + 6t\sin t + 12\cos t,\ c_1,\dots,c_4 \in \mathbb{C}$.

4. Stabilität

Worum geht's? 4.1.
In Anwendungen wichtig ist das Verhalten der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung für $t \to \infty$. Die Frage ist z.B., ob eine kleine Änderung der Anfangsdaten auch nur kleine Änderungen der Lösungen für alle Zeiten bewirken (Stabilität).
Stabilität lässt in konkreten Fällen kaum beweisen.
Manchmal hat man Glück und findet eine Ljapunow-Funktion und kann damit (asymptotische) Stabilität beweisen. Hier nur ein kurzer Einblick, Fortsetzung folgt im Hauptstudium (insbesondere bei partiellen Differentialgleichungen).

Definition 4.2.
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)) \ (t \in J), y(t_0) = y^0 \tag{*}$$

Dabei sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : J \times X \to X, X := \mathbb{R}^n$. X heißt **Zustandsraum** oder **Phasenraum**.
(*) sei eindeutig lösbar, t_0 fest.

Die Abbildung $\Phi : J \times X \to X, (t, y^0) \mapsto \Phi(t, y^0) := y(t)$ heißt der **Fluss** der Differentialgleichung (wobei $y(t)$ die Lösung von (*) ist).
Der Wertebereich $\gamma(y^0) := \{\Phi(t, y^0) : t \in J\}$ heißt **Orbit** (**Phasenkurve**, **Trajektorie**).
Ein $y^0 \in X$ heißt **Fixpunkt**, falls gilt $\Phi(t, y^0) = y^0$ für $t \in J$. Offensichtlich ist y^0 genau dann Fixpunkt, falls $f(t, y^0) = 0$ für $t \in J$, d.h. y^0 ist **singulärer Punkt** von f.

Z.B.: die logistische Gleichung $y'(t) = y(t)(1 - y(t))$ besitzt zwei Fixpunkte: $y^0 = 0, y^0 = 1$.

Beispiel 4.3.
Die Differentialgleichung $x'' + x = 0$ (ungedämpftes lineares Pendel) ist äquivalent zu $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$ für $y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.
Das Anfangswertproblem $y' = Ay, y(0) = y^0$ besitzt die Lösung $\Phi(t, y^0) = y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} y^0$ Damit ist der Orbit periodisch mit Periode 2π.

Beispiel 4.4. (Orbits bei 2×2-Matrizen)

Betrachte $y' = Ay$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Damit $y(t) = \exp(tA)y^0$. Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A. Für die Orbits erhalten wir verschiedene Möglichkeiten:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: Quelle
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: Senke
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: instabiler Sattelpunkt
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: instabiler eintangentialer Knoten
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$: stabiler eintangentialer Knoten
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: Zentrum oder Wirbelpunkt
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$: instabiler Strudelpunkt
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$: stabiler Strudelpunkt

Fixpunkt jeweils $y^0 = 0$.

Definition 4.5.
Eine Lösung y des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t)), y(0) = y^0$ heißt **stabil**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen x der Differentialgleichung $x'(t) = f(t, x(t))$ mit $|y^0 - x(0)| < \delta$ gilt $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ für $t \geq 0$.

Die Lösung y heißt **instabil**, falls y nicht stabil ist.

Die Lösung heißt **asymptotisch stabil**, falls sie stabil ist und falls für x (wie oben) gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0$.

Allgemein ist die *triviale Lösung* ($y(t) = 0$ für $t \in J$) von $y'(t) = Ay(t)$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann

- *instabil*, falls ein Eigenwert λ von A existiert mit $Re(\lambda) > 0$ oder mit $Re(\lambda) = 0$, falls $\mu_g(\lambda) < \mu_a(\lambda)$ (nicht-trivialer Jordan-Block, Polynome als Lösung);
- *stabil*, falls für alle Eigenwerte λ von A gilt: $Re(\lambda) \leq 0$ und $\mu_g(\lambda) = \mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda)$ für $Re(\lambda) = 0$;
- *asymptotisch stabil*, falls für alle Eigenwerte von A gilt: $Re(\lambda) < 0$.

Beispiel 4.6.
$y''(t) + y(t) + ry'(t) = 0$ für $r > 0$.
Multipliziere die Differentialgleichung mit $y'(t)$:
$y'(t)y''(t) + y'(t)y(t) + r|y'(t)|^2$
$\Rightarrow y'(t)y''(t) + y'(t)y(t) = -r|y'(t)|^2$

$$\Rightarrow \tfrac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}|y'(t)|^2}_{\text{kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{1}{2}|y(t)|^2}_{\text{potentielle Energie}} \right) = -r|y'(t)|^2 \leq 0 \Rightarrow \text{Energie nimmt ab.}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(|y'(t)|^2 + |y(t)|^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(|y'(0)|^2 + |y(0)|^2\right)$.

Schreibe die Differentialgleichung als System erster Ordnung mit $x = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) - rx_2(t) \end{pmatrix} =: f(x(t))$$

Sei $E(x) := \frac{1}{2}|x|^2$, dann folgt:

$$E(x(t)) = \langle x(t), x'(t)\rangle = \langle x(t), f(x(t))\rangle = -r|x_2(t)|^2$$

Definition 4.7.
Der Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ sei ein isolierter, singulärer Punkt von $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Dann heißt $L \in C^1(U(x^0), \mathbb{R})$ ($U(x^0)$ eine Umgebung) **Ljapunow-Funktion** zur Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ am Punkt x^0, falls gilt:

(i) $L(x) \geq 0$ und $L(x) = 0$ nur für $x = x^0$;

(ii) Es gilt $\langle \nabla L(x), f(x)\rangle \leq 0$ für $x \in U(x^0)$.

Satz 4.8.
Sei $x^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ ein isolierter, singulärer Punkt des Vektorfeldes $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Falls

eine Ljapunow-Funktion L zu $x(t) = f(x(t))$ am Punkt x^0 existiert, dann ist die konstante Lösung $y = 0$ stabil.

Beweis:
Es sei L auf $B(0, \varepsilon^0)$ definiert. Für $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$ setze $m(\varepsilon) := \min\limits_{|x|=\varepsilon} L(x) > 0$.

Da L stetig ist mit $L(0) = 0$, existiert ein $\delta = \delta(x) < \varepsilon$ mit $L(x) < m(\varepsilon)$ für $x \in B(0, \delta)$.
Sei nun $x \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $x'(t) = f(x(t))$ mit $|x(t_1)| < \delta$ für ein $t_1 \geq 0$.
Dann gilt $L(x(t_1)) < m(\varepsilon)$ und $\frac{d}{dt}L(x(t)) = \langle L(x(t)), f(x(t))\rangle \leq 0$.
Also gilt für $t \geq t_1$: $L(x(t)) < m(\varepsilon)$.

Annahme: $\exists\, t \geq t_1$ mit $|x(t)| \geq \varepsilon$.
$\Rightarrow$ (da x stetig ist): es gibt ein $t_0 \geq t_1$ mit $|(t_0)| = \varepsilon \Rightarrow L(x(t_0)) \geq m(\varepsilon) \rightarrow$ Widerspruch.

$\Rightarrow\ \forall\, t \geq t_1$ gilt: $|x(t)| < \varepsilon \Rightarrow x(t)$ ist stabil.

□

Bemerkung 4.9.

(a) Die Schwierigkeit liegt im Auffinden der Ljapunow-Funktion.
Manchmal möglich: falls $f = -\nabla\varphi$, dann versuche es mit $L = \varphi$ ($\Rightarrow \langle \nabla L, f\rangle = -|\nabla\varphi|^2$).

(b) Falls in der Definition von L unter (ii) $\langle \nabla L(x), f(x)\rangle < 0$ für $x \neq x_0$ (statt „$\leq$“), dann heißt L eine **strenge Ljapunow-Funktion**.
Man kann zeigen, dass dann $y = 0$ eine asymptotisch stabile Lösung ist.

5. Rand- und Eigenwertprobleme

Worum geht's? 5.1.
Eine eingespannte Saite genügt der partiellen Differentialgleichung $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$, $t \geq 0$ (Zeit), $x \in [0, L]$ (Länge, Position)

Die Saite ist fest eingespannt, d.h. $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, mit den Anfangswerten $u(0, x) = u_0(x)$, $\partial_t u(0, x) = u_1(x)$.

Wir machen den folgenden (multiplikativen) **Separationsansatz**:
$u(t, x) = a(t) \cdot v(x)$.

Dann folgt aus der Differentialgleichung:
$a''(t)v(x) + a(t)v''(x) = 0$.
$\Rightarrow \frac{a''(t)}{a(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} =: -\lambda \in \mathbb{R}$ (konstant!)

Die Konstante λ heißt **Separationskonstante**.
Wir erhalten nun $v''(x) + \lambda v(x) = 0, v(0) = v(L) = 0$
Dies ist ein Rand- und Eigenwertproblem.

a. Randwertaufgaben für Differentialgleichungssysteme

Betrachte das Randwertproblem

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t) \text{ für } t \in [a, b] \tag{1}$$

$$Ay(a) + By(b) = c \tag{2}$$

Hier sind $a, b \in \mathbb{R}, a < b, F \in C([a, b]; \mathbb{C}^{n \times n}), g \in C([a, b]; \mathbb{C}^n), A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}, c \in \mathbb{C}^n$.
Sei $Y \in C^1([a, b]; \mathbb{C}^{n \times n})$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems, d.h. $y'(t) = F(t)Y(t)$.

Variation der Konstanten:

$$\boxed{y_0(t) := Y(t) \int_a^t Y(s)^{-1} g(s)\, ds}$$

ist eine spezielle Lösung von (1).
Allgemeine Lösung: $y(t) = y_0(t) + Y(t) \cdot d$ für $d \in \mathbb{C}^n$.

Satz 5.2.
Das Randwertproblem (1) - (2) ist genau dann für ein beliebiges g und c eindeutig lösbar, falls die charakteristische Matrix $C_Y := AY(a) + BY(b)$ invertierbar ist.
Dies ist äquivalent dazu, dass das homogene Randwertproblem $y'(t) = F(t)y(t), Ay(a) + By(b) = 0$ nur die triviale Lösung $y = 0$ besitzt.

Beweis:
Setze die allgemeine Lösung in die Randbedingung ein:
$\underbrace{(AY(a) + BY(b))}_{C_Y} d + By_0(b) = c$.
Eindeutige Lösbarkeit $\Leftrightarrow \det C_Y \neq 0$.

□

Bemerkung 5.3.
Seien Y, Z zwei Fundamentalmatrizen von . Dann gilt $Z(t) = Y(t) \cdot S$ mit $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
Es gilt $\det S \neq 0$ $(S = Y(a)^{-1} Z(a))$.

Damit $C_Z = AZ(a) + BZ(b) = C_Y \cdot S$, insbesondere $\det C_Y \neq 0 \Leftrightarrow \det C_Z \neq 0$.

Nun geht es um die Lösung des Randwertproblems mit homogenen Randbedingungen:

$$y'(t) = F(t)y(t) + g(t), Ay(a) + By(b) = 0 \tag{3}$$

Satz 5.4.
*Sei C_Y invertierbar. Dann existiert eine matrizenwertige Abbildung $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}^{n \times n}$ (die **Greensche Matrix**) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Einschränkung von G auf die Bereiche $\{(t, s) : a \leq t < s \leq b\}$ und $\{(t, s) : a \leq s \leq t \leq b\}$ ist jeweils stetig;

(ii) $G(t + 0, t) - G(t - 0, t) = I_n$ für $t \in [a, b]$ $\qquad$ *$(t + 0 = \lim_{x \searrow t} x)$;*

(iii) Für jedes $g \in C([a, b]; \mathbb{C}^n)$ ist die eindeutige Lösung von (3) gegeben durch $\boxed{y(t) = \int_a^b G(t, s) g(s)\, ds.}$

Beweis:
Die eindeutige Lösung von (3) ist gegeben durch $y(t) = y_0(t) + Y(t) \cdot d$ mit $d := -C_Y^{-1} B y_0(b)$.
Setze die Formel für y_0 ein:

$$y(t) = \int_a^t Y(t)Y(s)^{-1} g(s)\,ds + Y(t) \cdot (-C_Y^{-1} B \underbrace{y_0(b)}_{\int_a^b Y(b)Y(s)^{-1} g(s)\,ds})$$

$$= \int_a^b G(t,s) g(s)\,ds$$

mit $G(t,s) := \begin{cases} Y(t)(I_n - C_Y^{-1} B Y(b)) Y(s)^{-1} & , a \leq s \leq t \leq b; \\ -Y(t) C_Y^{-1} B Y(b) Y(s)^{-1} & , a \leq t < s \leq b. \end{cases}$

Die Stetigkeit (i) ist klar, die Sprungbedingung (ii) ergibt sich direkt aus der Definition von G.

□

Bemerkung 5.5.
Nach Definition von C_Y gilt $I_n - C_Y^{-1} B Y(b) = C_Y^{-1} A Y(a)$.
Damit $G(t,s) = \begin{cases} Y(t) C_Y^{-1} A Y(a) Y(s)^{-1} & , a \leq s \leq t \leq b; \\ -Y(t) C_Y^{-1} B Y(b) Y(s)^{-1} & , a \leq t < s \leq b. \end{cases}$
Da über G integriert wird, spielen die Werte auf der Diagonalen $\Delta := \{(t,t) : t \in [a,b]\}$ keine Rolle.

Lemma 5.6.
Sei $\det C_Y \neq 0$. *Dann ist die Greensche Matrix durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt:*

(i) G *ist auf* $[a,b]^2 \setminus \Delta$ *stetig;*

(ii) $G(t+0,t) - G(t-0,t) = I_n$ *für* $a < t < b$*;*

(iii) Für jedes feste $s \in [a,b]$ *löst* $G(\cdot,s)$ *die homogene Matrix-Differentialgleichung* $\partial_t G(t,s) = F(t) G(t,s)$ *für* $t \in [a,b] \setminus \{s\}$*;*

(iv) Für jedes feste $s \in (a,b)$ *erfüllt* $G(\cdot,s)$ *die homogenen Randbedingungen* $AG(a,s) + BG(b,s) = 0$.

Beweis:
Dass (i) - (ii) für die oben definierte Greensche Matrix gilt, ist klar.
Für festes s ist $G(t,s) = Y(t)K$ mit $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ für $t \in [a,b] \setminus \{s\}$, also gilt (iii).

Zu (iv): $AG(a,s) + BG(b,s) = A[-Y(a)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1}] + B[Y(t)C_Y^{-1}AY(a)Y(s)^{-1}] = 0.$

Sei nun $\widetilde{G}$ eine weitere Abbildung mit (i) - (iv). Setze $H := G - \widetilde{G}$. Dann ist H wegen (ii) stetig ergänzbar auf $[a,b]^2$ und erfüllt für festes s die Differentialgleichung $\partial_t H(t,s) = F(t)H(t,s)$ in $[a,b]$ erfüllt H die homogenen Randbedingungen. Da das homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung besitzt, folgt $H = 0$.

□

b. Randwertprobleme für Differentialgleichungen höherer Ordnung

$$f_0(t)x^{(n)}(t) + f_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + f_n(t)x(t) = \gamma(t) \tag{4}$$

in $[a,b]$, $f_0, \ldots, f_n, \gamma \in \mathbb{C}([a,b];\mathbb{C})$, $f_0 \neq 0$ in $[a,b]$.
Randbedingung:

$$R_i x := \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} x^{(j-1)}(a) + \beta_{ij} x^{(j-1)}(b)) = \gamma_i, \alpha_{ij} \in \mathbb{C}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}, \gamma_i \in \mathbb{C} \text{ für } i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Normierung: $\widetilde{f_j} := \frac{f_j}{f_0}$ für $j = 1, \ldots, n$, $\widetilde{g} := \frac{\gamma}{f_0}$.
$y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$, $F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\widetilde{f_n}(t) & \ldots & \ldots & -\widetilde{f_1}(t) \end{pmatrix}$, $g(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \widetilde{g}(t) \end{pmatrix}$
$A := (\alpha_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $B := (\beta_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $c := (\gamma_i)_{i=1,\ldots,n}$.
Damit ist (4) - (5) äquivalent zum Randwertproblem $y'(t) = F(t)y(t) + g(t)$, $Ay(a) + By(b) = c$.

Satz 5.7.
*Das homogene Randwertproblem (4) - (5) besitze nur die triviale Lösung. Dann existiert eine Funktion $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ (**Greensche Funktion**), die in $[a,b]^2 \setminus \Delta$ stetig ist und für die durch*

$$x(t) := \int_a^b G(t,s)\gamma(s)\, ds \text{ für } t \in [a,b]$$

die eindeutige Lösung von (4) mit homogenen Randbedingungen $R_i x = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gegeben ist.

Beweis:
Eindeutige Lösbarkeit ist klar.
Sei $\widetilde{G}$ die Greensche Matrix zum zugehörigen System, d.h.

$$y(t) := \int_a^b dt G(t,s) g(s)\, ds$$

ist die Darstellung der Lösung. Es gilt $x(t) = e_1^t \cdot y(t)$ (erste Komponente).

Die ersten $n-1$ Komponenten von g verschwinden, also gilt $x(t) = \int_a^b G(t,s)\gamma(s)\,ds$, wenn man $G(t,s) = \frac{e_1^t \widetilde{G}(t,s) e_n}{f_0(s)}$ setzt. □

Lemma 5.8.
Das homogene Randwertproblem sei eindeutig lösbar. Dann ist die Greensche Funktion durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt:

(i) *G ist stetig, und für jedes feste $s \in [a,b]$ ist $G(\cdot,s) \in C^{n-2}([a,b];\mathbb{C})$;*

(ii) *für festes $s \in [a,b]$ ist $G(\cdot,s)$ in $[a,b]\setminus\{s\}$ n-mal stetig differenzierbar, und $\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}G(t+0,t) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}G(t-0,t) = \frac{1}{f_0(t)}$ für $t \in [a,b]$;*

(iii) *für festes $s \in [a,b]$ löst $G(\cdot,s)$ die homogene Differentialgleichung (1) in $[a,b]\setminus\{s\}$;*

(iv) *für jedes $s \in [a,b]$ erfüllt $G(\cdot,s)$ die homogenen Randbedingungen (2).*

Beweis:
Aus dem Beweis von Satz 5.7 wissen wir $G(t,s) = \frac{1}{f_0(s)} e_1^t \widetilde{G}(t,s) e_n$

Nach Bemerkung 5.5 war $\widetilde{G}(t,s) = \begin{cases} Y(t)C_Y^{-1}AY(a)Y(s)^{-1} & ,a \le s \le t \le b; \\ -Y(t)C_Y^{-1}BY(b)Y(s)^{-1} & ,a \le s < t \le b. \end{cases}$

Für festes s ist also jede Spalte von $\widetilde{G}(t,s)$ eine Linearkombination der Spalten von $Y(t)$.
Daher ist in $\widetilde{G}$ (wie in $Y(t)$) jede Zeile die Ableitung der darüberstehenden Zeile, $\frac{\partial^j}{\partial t^j} e_1^t\, dt G(t,s) = e_{j+1}^t \widetilde{G}(t,s)$ für $j = 1,\dots,n-1$.

Die letzte Spalte von $\widetilde{G}$ ist also $\frac{1}{f_0(s)}\widetilde{G}(t,s)e_n = \begin{pmatrix} G(t,s) \\ \partial_t G(t,s) \\ \vdots \\ \partial_t^{n-1} G(t,s) \end{pmatrix}$.

Damit folgen (iii) und (iv) aus den entsprechenden Aussagen von Lemma 5.6, ebenso (i), (ii) im Bereich $[a,b]^2 \setminus \Delta$. Die Eindeutigkeit folgt wie in 5.6.

Es gilt $\widetilde{G}(t+0,t) - \widetilde{G}(t-0,t) = I_n$. Für die letzte Spalte bedeutet dies: $\Gamma(\cdot,s), \partial_t G(\cdot,s), \dots, \partial_t^{n-2} G(\cdot,s)$ sind stetig, $\partial_t^{n-1} G(\cdot,s)$ macht einen Sprung mit Höhe $\frac{1}{f_0(s)}$.

□

c. Sturm-Liouville-Randwertprobleme

$$(LX)(t) := -(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = r(t) \tag{6}$$
$$R_1 x := \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) = \gamma_1 \tag{7}$$
$$R_2 x := \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = \gamma_2 \tag{8}$$

Dabei sind $p \in C^1([a,b];\mathbb{C})$ mit $p(t) \neq 0$ für $t \in [a,b]$, $1, r \in C([a,b];\mathbb{C})$, $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$, $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \neq 0 \neq (\beta_{21}, \beta_{22})$.

(6) - (8) heißt **Sturm-Liouville-Randwertproblem**.

Satz 5.9.
Das zu (6) - (8) gehörige homogene Randwertproblem besitze nur die triviale Lösung. Dann ist die Greensche Funktion gegeben durch
$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{p(a)W(a)}\varphi(t)\psi(s) & , a \leq t \leq s \leq b; \\ -\frac{1}{p(a)W(a)}\psi(t)\varphi(s) & , a \leq s \leq t < b. \end{cases}$$
Dabei sind φ und ψ Lösungen von $L\varphi = 0, R_1\varphi = 0$ mit $R_2\varphi \neq 0$, $L\psi = 0, R_2\psi = 0$ mit $R_1\psi \neq 0$.
$W(t) := W(\varphi,\psi)(t) := \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)$ ist die Wronski-Determinante zu $\{\varphi,\psi\}$.

Beweis:

(i) Existenz von φ und ψ: da das homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung besitzt, hat etwa $L\varphi = 0, R_1\varphi = 0, R_2\varphi = 1$ eine eindeutige Lösung. Analog ψ.

(ii) Lineare Unabhängigkeit von $\{\varphi,\psi\}$: falls z.B. $\varphi = \alpha\psi$ mit einem $\alpha \in \mathbb{C}$, dann ist $L\varphi = 0, R_1\varphi = 0, R_2\varphi = \alpha R_2\psi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$, Widerspruch.

(iii) Betrachtung der Wronski-Determinante: schreibe (6) als System erster Ordnung:

$$y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{q(t)}{p(t)} & -\frac{p'(t)}{p(t)} \end{pmatrix}}_{=:A(t)} y(t)$$

Die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems $\left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} \right\}$ erfüllt (nach Formel von Liouville):

$$W(t) = W(a)\exp\left(\int\limits_a^t \operatorname{tr}(A(s))\,ds\right) = W(a)\exp\left(-\int\limits_a^t \frac{p'(s)}{p(s)}\,ds\right) =$$
$$W(a)\exp(-\ln p(s)\,|_{s=a}^t) = W(a)\exp(-\ln p(t) + \ln p(a)) = \frac{W(a)p(a)}{p(t)}.$$
$W(a) \neq 0$ nach (ii).

(iv) Wir rechnen die Eigenschaften (i) - (iv) aus Lemma 5.8 nach:
5.8 (i) ist klar,

zu 5.8 (ii): $\partial_t G(t+0,t) - \partial_t G(t-0,t) = -\frac{1}{p(a)W(a)} \underbrace{(\psi'(t)\varphi(t) - \varphi'(t)\psi(t))}_{=W(t)} = -\frac{1}{p(t)}$.

Sei $s \in [a,b]$ fest. Für $t < s$ ist $[LG(\cdot,s)]\,(t) = -\frac{\psi(s)}{p(a)W(a)}(L\varphi)(t) = 0$.
Analog für $t > s$. Dies zeigt 5.8 (iii).

Randterme: $R_1G(\cdot,s) = -\frac{\psi(s)}{p(a)W(a)}R_1\varphi = 0$. Analog $R_2G(\cdot,s) = 0$.
Somit gilt 5.8 (iv). Nach Lemma 5.8 ist G also die Greensche Funktion.

□

Bemerkung 5.10.

(a) Nach Satz 5.9 gilt $G(t,s) = G(s,t)$ (Symmetrie der Greenschen Funktion)

(b) Nach Bemerkung 5.3 ist (6) - (8) genau dann eindeutig lösbar, falls für ein Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ von (6) gilt: $\det\left(\left(R_i\varphi_j\right)_{i,j=1,2}\right) \neq 0$.

Beispiel 5.11.
Betrachte $(Lx)(t) := -x''(t) - k^2x(t) = r(t)$ (*)
mit $k \in \mathbb{R}, k \geq 0$.
$R_1x(t) := x(0) = 0$
$R_2x(t) := x(1) = 0$

Hier ist $p = 1, q = -k^2$. Ein Fundamentalsystem von (*) ist $\varphi_1 = \sin(kt), \varphi_2 = \cos(kt)$.
Es ist $\det\begin{pmatrix} R_1\varphi_1 & R_1\varphi_2 \\ R_2\varphi_1 & R_2\varphi_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix} = -\sin k \neq 0$ für $k \notin \pi\mathbb{Z}$.

Für die Greensche Funktion verwenden wir Satz 5.9. Eine Lösung von $L\varphi = 0, R_1\varphi = 0$ ist $\varphi(t) := \sin kt$. Eine Lösung von $L\psi = 0, R_2\psi = 0$ ist etwa $\psi(t) := \sin k(1-t)$.
Sei ab jetzt $k \notin \pi\mathbb{Z}$. Dann ist $R_2\varphi \neq 0 \neq R_1\psi$.

Die Wronski-Determinante $W(0)$ an der Stelle $a = 0$ ist $W(0) = \varphi(0)\psi'(0) - \varphi'(0)\psi(0) = 0 \cdot \psi'(0) - k \cdot \sin k = -k \sin k$.

Nach 5.9 ist die Greensche Funktion: $G(t,s) = -\frac{1}{-k \sin k} \sin(kt) \sin(k(1-s))$ für $0 \leq t \leq s \leq 1$.
Für $0 \leq s \leq t \leq 1$ ist $G(t,s)$ durch Symmetrie gegeben.

Die Lösung des Randwertproblems $Lx = r, R_1 x = R_2 x = 0$ ist also gegeben durch $x(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) r(s)\, ds$.

d. Selbstadjungierte Eigenwertaufgaben

Wieder Sturm-Liouville, diesmal mit einem (unbekannten) Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(Lx)(t) := -\frac{1}{r(t)}\left[(p(t)x'(t))' - q(t)x(t)\right] = \lambda x(t) \tag{9}$$

$$R_1 x := \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x'(a) = \gamma_1 \tag{10}$$

$$R_2 x := \beta_{21}x(b) + \beta_{22}x'(b) = \gamma_2 \tag{11}$$

Hier: $p \in C^1([a,b];\mathbb{R})$, $p(t) \neq 0$ für $t \in [a,b]$, $q,r \in C([a,b];\mathbb{R})$, $\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_i \in \mathbb{R}$, $(\alpha_{11},\alpha_{12}) \neq 0 \neq (\beta_{21},\beta_{22})$, $\underline{r(t) > 0}$ für $t \in [a,b]$.

Definition 5.12.

(a) Der zum Eigenwertproblem (9) - (11) gehörige **lineare Operator** A ist definiert als Abbildung $A : D(A) \to C([a,b];\mathbb{C})$ mit Definitionsbereich $D(A) := \{x \in C^2([a,b];\mathbb{C}) : R_1x = R_2x = 0\} \subset C([a,b];\mathbb{C})$ durch $Ax := Lx$ für $x \in D(A)$.

(b) Ein **Eigenwert** von A ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche ein $x \in D(A) \setminus \{0\}$ existiert mit $Ax = \lambda x$. Dann heißt x **Eigenvektor** oder **Eigenfunktion**.

(c) Das zum Eigenwertproblem (9) - (11) gehörige Skalarprodukt ist definiert als $\langle u,v\rangle = \int\limits_a^b r(t)u(t)\overline{v(t)}\,dt$ für $u,v \in C([a,b];\mathbb{C})$.
Die Norm dazu ist $\|u\| := \sqrt{\langle u,u\rangle}$.

Im Folgenden sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bzw. $\|\cdot\|$ stets wie oben.

Bemerkung 5.13.
Das Randwertproblem $Au = \lambda u$ hat immer die triviale Lösung $u = 0$. Die Eigenwerte sind also genau die Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $Au = \lambda u$ nicht eindeutig lösbar ist.

Sei $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem von $Lu - \lambda u = 0$, $\varphi_j = \varphi_j(t,\lambda)$. Dann existiert genau dann eine Eigenfunktion $x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, wenn $\sum\limits_{j=1}^{2} c_jR_i\varphi_j = 0$, für $i = 1,2$, eine nichttriviale Lösung besitzt. Also genau dann, wenn $\Delta(\lambda) := \det\begin{pmatrix} R_1\varphi_1(\cdot,\lambda) & R_1\varphi_2(\cdot,\lambda) \\ R_2\varphi_1(\cdot,\lambda) & R_2\varphi_2(\cdot,\lambda)\end{pmatrix} = 0$.

Satz 5.14.

(a) *Der Operator A ist symmetrisch, d.h. es gilt $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ für $u, v \in D(A)$.*

(b) *Alle Eigenwerte von A sind reell.*

(c) *Die Eigenfunktionen φ_1, φ_2 zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind orthogonal, d.h. $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$.*

Beweis:

(a) Seien $u, v \in D(A)$. $\langle Au, v\rangle = \int\limits_a^b r(t)\left[-\frac{1}{r(t)}\left[(p(t)u'(t))' - q(t)u(t)\right]\right]\overline{v(t)}\,dt = \int\limits_a^b \left[-(p(t)u'(t))' + q(t)u(t)\right.$

$= -p(t)u'(t)\overline{v(t)}\ |_{t=a}^b + \int\limits_a^b \left(p(t)u'(t)\overline{v'(t)} + q(t)u(t)\overline{v(t)}\right)\,dt.$

Genauso $\langle u, Av\rangle$. Damit:

$\langle Au, v\rangle - \langle u, Av\rangle = p(t)\left[u(t)\overline{v'(t)} - u'(t)\overline{v(t)}\right]\ |_{t=a}^b.$

Da sowohl u als auch v die homogenen Randbedingungen erfüllen ($u, v \in D(A)$!), folgt,

$$u(t)\overline{v'(t)} - u'(t)\overline{v(t)}\ |_{t=a}^b = 0 \qquad (*)$$

Z.B. falls $\alpha_{11} \neq 0, \beta_{21} \neq 0$, so gilt mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$: $u(a) = c_1 u'(a), v(a) = c_1 v'(a)$, $u(b) = c_2 u'(b), v(b) = c_2 v'(b)$.

Eingesetzt erhält man (*)

(b) Das folgt wie in der Linearen Algebra: sei $u \in D(A)$, $u \neq 0$, $Au = \lambda u$. Dann ist $\lambda\|u\|^2 = \langle \lambda u, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \overline{\lambda}\|u\|^2$. $u \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Seien φ_1, φ_2 Eigenvektoren zu $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann gilt $\lambda_1 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \lambda_1\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle A\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, A\varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \lambda_2\varphi_2 \rangle = \lambda_2 \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$.

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$.

$\square$

Ziel ist es, die Eigenwerte näher zu kennen. Dazu betrachten wir A^{-1}.

Lemma 5.15.
Das homogenen Randwertproblem $Lx = 0, R_1x = R_2x = 0$ besitze nur die triviale Lösung ($\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von A).
Sei G die zugehörige Greensche Funktion.

(a) *Der Operator $A : D(A) \to C([a,b];\mathbb{C})$ ist bijektiv, d.h. der inverse Operator $M := A^{-1} : C([a,b];\mathbb{C}) \to C([a,b];\mathbb{C})$ ist wohldefiniert.*

(b) *Es gilt:* $(Mf)(t) = \int_a^b r(s)G(t,s)f(s)\,ds.$

(c) *Der Operator M ist symmetrisch.*

(d) *Eine Zahl $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist genau dann Eigenwert von M, falls $\frac{1}{\mu}$ Eigenwert von A ist.*

Beweis:
Klar ... □

Lemma 5.16.
Sei 0 *kein Eigenwert von A.*

(a) *Es existiert ein $f \in C([a,b];\mathbb{C})$ mit $\langle Mf, f\rangle \neq 0$.*

(b) *Für die Operatornorm $\|M\| := \sup\limits_{f\neq 0} \frac{\|Mf\|}{\|f\|}$ gilt*

$$\boxed{\|M\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Mf, f\rangle|.}$$

Beweis:
Da M symmetrisch ist, gilt für alle $f, g \in C([a,b];\mathbb{C})$:
$\langle M(f \pm g), f \pm g\rangle = \langle Mf, f\rangle \pm 2Re\,\langle Mf, g\rangle + \langle Mg, g\rangle.$ (*)

(a) Falls $\langle Mf, f\rangle = 0$ für alle $f \in C([a,b];\mathbb{C})$, folgt aus (*): $Re\,\langle Mf, g\rangle = 0$ für $f, g \in C([a,b];\mathbb{C})$.
Setze $g := Mf$: $\|Mf\|^2 = 0 \Rightarrow \|Mf\| = 0$, d.h. $M = 0$, Widerspruch zu $M = A^{-1}$.

(b) $c := \sup\limits_{\|f\|=1} |\langle Mf, f\rangle| \leq \sup\limits_{\|f\|=1} \|Mf\| \cdot \underbrace{\|f\|}_{=1} = \|Mf\|.$ (Cauchy-Schwarz).

Aus (*) folgt: $Re\,\langle Mf, g\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle M(f+g), f+g\rangle - \langle M(f-g), f-g\rangle\right]$
$\leq \frac{c}{4}\left[\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2\right]$ (Definition von c)

$= \frac{c}{4}\,[2\|f\|^2 + 2\|g\|^2]$ (Parallelogramm-Gleichung)

Sei $f \in C([a,b];\mathbb{C})$ mit $\|f\| = 1$. Wähle $g := \frac{Mf}{\|Mf\|}$:
$\langle Mf, g\rangle = \|Mf\| \leq c$. (wegen $\|f\| = \|g\| = 1$)

Damit $\|M\| = \sup\limits_{\|f\|=1} \|Mf\| \leq c$. Insgesamt $c = \|M\|$.

□

Der nächste Satz ist wichtig!

Satz 5.17. *(Arzelà-Ascoli)*
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(K;\mathbb{R}^m)$ eine Folge von Funktionen.
*Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei **gleichgradig** stetig, d.h.*

$$\forall\, x \in K\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, y \in K, |x-y| < \delta\ \forall\, n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon,$$

und (gleichmäßig beschränkt), d.h.

$$\exists\, C > 0\ \forall\, x \in K\ \forall\, n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x)| \leq C.$$

Dann existiert eine konvergente Teilfolge $(\widetilde{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_n$ und ein $f \in C(K;\mathbb{R}^m)$ mit

$$\|\widetilde{f_n} - f\|_\infty \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Beweis:

(i) Wir zeigen: $(f_n)_n$ ist gleichgradig gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x,y \in K, |x-y| < \delta\ \forall\, n \in \mathbb{N}\colon |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Sonst existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x,y \in K, |x-y| < \delta\ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ |f_n(x) - f_n(y)| \geq \varepsilon \tag{12}$$

Zu $\delta_k := \frac{1}{k}$ existieren also $x_k, y_k, |x_k - y_k| < \frac{1}{k}, n_k \in \mathbb{N}$ mit $|f_{n_k}(x_k) - f_{n_k}(y_k)| \geq \varepsilon$. Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $x_k \to x$. Wegen $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$ gilt auch $y_k \to x$.
Damit $|f_{n_k}(x_k) - f_{n_k}(y_k)| \leq \underbrace{|f_{n_k}(x_k) - f_{n_k}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } k \text{ groß}} + \underbrace{|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y_k)|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } k \text{ groß}} < \varepsilon$ für großes k,

Widerspruch zu (12).

(ii) Konstruktion einer punktweise konvergenten Teilfolge:
sei $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge von K (z.B. $Y = \mathbb{Q}^n \cap K$). Sei $f_{n,0} := f_n$. Sei $(f_{n,1})_n$ eine Teilfolge von $(f_{n,0})_n$, die an der Stelle y_1 konvergiert. *(Beachte: $\|f_n\|_\infty \leq C$ und wende Bolzano-Weierstraß an)* Sei $(f_{n,2})_n$ eine Teilfolge von $(f_{n,1})_n$, welche (zusätzlich) an der Stelle y_2 konvergiert, usw.
Man erhält iterativ eine Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} := (f_{n,n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, welche an jeder Stelle y_j konvergiert.
Nach (i) konvergiert $(g_n)_n$ punktweise in K.

(iii) Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz von $(g_n)_n$ in K:
sei $\varepsilon > 0$. Nach (i) existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$\forall\, x, y \in K, |x-y| < \delta(\varepsilon)\ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ |g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{13}$$

Da $Y \subset K$ dicht, existiert eine endliche Teilmenge $Z = \{z_1, \ldots, z_M\} \subset Y$ mit
$\forall\, x \in K\ \exists\, z_j \in Z : |x - z_j| < \delta(\varepsilon)$ (K kompakt!)
Nach (ii) konvergiert $(g_n(z_j))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$, ist also Cauchy-Folge.
Damit $\exists\, N_j \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq N_j$: $(g_n(z_j) - g_m(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
Setze $N := \max\{N_1, \ldots, N_M\}$. Dann:

$$\forall\, n, m \geq N\ \forall\, j = 1, \ldots, M: \ |g_n(z_j) - g_m(z_j)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

Sei $x \in K$. Zu x wähle $z_j \in Z$ mit $|x - z_j| < \delta(\varepsilon)$.

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \underbrace{|g_n(x) - g_n(z_j)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (13)}} + \underbrace{|g_n(z_j) - g_m(z_j)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (14), falls } n,m\geq N} + \underbrace{|g_m(z_j) - g_m(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (13)}} < \varepsilon$$

für $n, m \geq N$.

□

Satz 5.18.
In der Situation von Lemma 5.15 gilt:
*der Operator $M : C([a,b];\mathbb{C}) \to C([a,b];\mathbb{C})$ ist **kompakt**, d.h. falls $(f_n)_n \subset C([a,b];\mathbb{C})$ eine (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) beschränkte Folge ist, dann besitzt $(Mf_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b];\mathbb{C})$ eine konvergente Teilfolge.*

Beweis:
Rechne die Voraussetzungen von Arzelà-Ascoli nach. (siehe Übungsaufgabe)

□

Diese Aussage wirkt noch sehr abstrakt, ist aber zentral für Aussagen über Eigenwerte von M bzw. A.

SATZ 5.19.
Der Operator M besitzt einen Eigenwert $\mu \in \mathbb{R}$ mit $|\mu| = \|M\|$.

BEMERKUNG:
$M \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow$ Operatornorm: $\|M\| = \max_j \sigma_j$ mit Singulärwerten $\sigma_j(M) := \sqrt{\lambda_j(M^t \cdot M)}$.

BEWEIS:
Nach Lemma 5.16 (b) existiert eine Folge $(f_n)_n \subset C([a,b];\mathbb{C})$ mit $\|f_n\| = 1$ und $|\langle Mf_n, f_n\rangle| \to \|M\|$ für $n \to \infty$.
Da $\langle Mf, f\rangle \in \mathbb{R}$ für alle f, existieren unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ mit $\langle Mf_n, f_n\rangle \geq 0$ oder unendlich viele mit $\langle Mf_n, f_n\rangle \leq 0$.
Sei etwa $\langle Mf_n, f_n\rangle \geq 0$ für alle n, d.h. $\langle Mf_n, f_n\rangle \to \|M\|$. Da M kompakt ist, können wir annehmen, dass $(Mf_n)_n \subset C([a,b];\mathbb{C})$ konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}\|Mf_n - \|M\| \cdot f_n\|^2 &= \underbrace{\|Mf_n\|^2}_{\leq \|M\|\|f_n\| = \|M\|} - 2\|M\| \cdot \langle Mf_n, f_n\rangle + \|M\|^2 \cdot \underbrace{\|f_n\|^2}_{=1} \\ &\leq 2 \cdot \|M\|^2 - 2\|M\| \cdot \langle Mf_n, f_n\rangle \to 0 \text{ für } n \to \infty\end{aligned}$$

Da $(Mf_n)_n$ konvergiert, konvergiert auch $(f_n)_n$, d.h. $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C([a,b];\mathbb{C})$ existiert. Es gilt: $Mf = M(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty}(Mf_n) = \lim_{n\to\infty} \|M\| \cdot f_n = \|M\| \cdot f$, d.h. $\|M\|$ ist ein Eigenwert von M.

Falls unendlich oft $\langle Mf_n, f_n\rangle < 0$, erhält man analog: $-\|M\|$ ist ein Eigenwert von M.

□

BEMERKUNG 5.20.

(i) Nach 5.16 ist $\mu_1 := \pm\|M\|$ der betragsgrößte Eigenwert von M. ($\|M\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Mf, f\rangle|$)
Sei u_1 die zugehörige Eigenfunktion, d.h. $Mu_1 = \mu u_1$.
Wegen $Mu_1 \in D(A)$ ist u_1 auch Eigenfunktion von A zum Eigenwert $\lambda_1 := \frac{1}{\mu_1}$.

(ii) Das Verfahren von Satz 5.19 kann fortgesetzt werden: betrachte für $n \in \mathbb{N}$ sukzessive $c_n := \sup\{|\langle Mf, f\rangle| : \|f\| = 1, \langle f, u_1\rangle = \ldots = \langle f, u_{n-1}\rangle = 0\}$
Dann sieht man wie oben: es existiert ein Eigenwert μ_n von M mit $|\mu_n| = c_n$.
(Betrachte $M|_{E_n}$ mit $E_n := \{f \in C([a,b];\mathbb{C}) : \langle f, u_1\rangle = \ldots = \langle f, u_{n-1}\rangle = 0\}$.
Dann gilt: $M|_{E_n} : E_n \to E_n$, $M|_{E_n}$ symmetrisch, $M|_{E_n}$ kompakt. Wende Satz 5.19 an ...)

(iii) Eigenwerte, Eigenfunktionen und die Greensche Funktion sind reell (wählbar). Es gilt für die Eigenfunktionen $\left\langle u_j, u_k \right\rangle = 0$ für $j \neq k$. Nach Normierung $\|u_j\| = 1$ erhalten wir $\left\langle u_j, u_k \right\rangle = \delta_{jk}$.

Satz 5.21.
Sei $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$ die oben konstruierte Folge von Eigenwerten von A. Dann gilt $|\lambda_n| \to \infty$ für $n \to \infty$.
Insbesondere besitzt A unendlich viele Eigenwerte und die Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen (endlichen) Häufungspunkt.

Jeder Eigenwert von A ist in dieser Folge enthalten.

Beweis:

(i) Da $\dim C([a,b];\mathbb{C}) = \infty$, ist $E_n (= \{f \in C([a,b];\mathbb{C}) : \langle f, u_1 \rangle = \ldots = \langle f, u_{n-1} \rangle = 0\}) \neq \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da M injektiv, ist $M\,|_{E_n} \neq 0$, also existiert ein Eigenwert μ_n mit $|\mu_n| = \|M\,|_{E_n}\|$.
Somit ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich.

(ii) Sei $G_n(t,s) := \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{u_j(t)u_j(s)}{\lambda_j}$. Für festes t gilt:
$0 \leq \|G(t,\cdot) - G_n(t,\cdot)\|^2 = \|G(t,\cdot)\|^2 - 2\,\langle G(t,\cdot), G_n(t,\cdot)\rangle + \|(t,\cdot)\|^2.$ (*)

Berechne das Skalarprodukt (wir wollen die λ_j abschätzen). Dazu:

$$\frac{u_j}{\lambda_j} = Mu_j = \int_a^b r(s)G(t,s)u_j(s)\,ds = \left\langle G(t,\cdot), u_j \right\rangle.$$

Damit $\langle G(t,\cdot), G_n(t,\cdot)\rangle = \left\langle G(t,\cdot), \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{u_j(t)u_j(\cdot)}{\lambda_j} \right\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{u_j(t)}{\lambda_j} \underbrace{\left\langle G(t,\cdot), u_j(t) \right\rangle}_{=\frac{u_j(t)}{\lambda_j}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{u_j^2(t)}{\lambda_j^2}.$

Ebenso: $\|G_n(t,\cdot)\|^2 = \sum\limits_{j,k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j\lambda_k} \left\langle u_j(t)u_j(\cdot), u_k(t)u_k(\cdot) \right\rangle$
$= \sum\limits_{j,k=1}^{n} \frac{u_j(t)u_k(t)}{\lambda_j\lambda_k} \cdot \underbrace{\left\langle u_j, u_k \right\rangle}_{=\delta_{jk}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{u_j^2(t)}{\lambda_j^2}.$

In (*) eingesetzt:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{u_j^2}{\lambda_j^2} \leq \|G(t,\cdot)\|^2 \tag{15}$$

Multipliziere (15) mit $r(t)$ und integriere bezüglich t:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j^2} \underbrace{\int_a^b r(t) u_j^2(t)\, dt}_{=\|u_j\|^2=1} \leq \int_a^b \int_a^b r(t) r(s) G(t,s)^2 \, dt\, ds$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j^2} \leq \int_a^b \int_a^b r(t) r(s) G(t,s)^2 \, dt\, ds < \infty \tag{16}$$

Somit $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ ist konvergent, also $|\lambda_j| \to \infty$ für $j \to \infty$.

(iii) Sei λ ein Eigenwert von A mit $\lambda \neq \lambda_j$ für $j \in \mathbb{N}$ und u die zugehörige Eigenfunktion mit $\|u\| = 1$. Dann ist $\mu := \frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von M und wegen $\left\langle u, u_j \right\rangle = 0$ für $j \in \mathbb{N}$ folgt $u \in E_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
Damit $\mu \langle Mu, u\rangle \leq \sup_{f \in E_n, \|f\|=1} |\langle Mf, f\rangle| = |\mu_n| \to 0$ (nach (ii)) für $n \to \infty$.
Damit $\mu = 0$, Widerspruch.

□

Definition 5.22 (Verallgemeinerte Fourier-Reihen).
Sei 0 kein Eigenwert von A, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen von A wie oben. Für $f \in D(A)$ heißt $\langle f, u_n\rangle =: f_n$ der n-te verallgemeinerte Fourier-Koeffizient von f, und $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n\rangle u_n$ die verallgemeinerte Fourier-Reihe von f.

Satz 5.23 (Entwicklung nach Eigenfunktionen).
In der Situation von Definition 5.22 gilt

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n\rangle u_n(t) \text{ für } f \in D(A),$$

wobei die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert.

Beweis:
Sei $h := Af$, d.h. $f = Mh$. Für $h_n := \langle h, u_n\rangle$ gilt $f_n = \left\langle f, u_n\right\rangle = \langle Mh, u_n\rangle = \langle h, Mu_n\rangle = \frac{1}{\lambda_n}\langle h, u_n\rangle = \frac{h_n}{\lambda_n}$.

$$\left(\sum_{n=M}^{N} |\underbrace{f_n}_{=\frac{h_n}{\lambda_n}} u_n(t)|\right)^2 \leq \left(\sum_{n=M}^{N} |h_n|^2\right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{n=M}^{N} \frac{u_n^2(t)}{\lambda_n^2}\right)}_{\leq \|G(t,\cdot)\|^2 \text{ nach } (15)} \qquad \text{(nach Cauchy-Schwarz)}$$

Besselsche Ungleichung: $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2 \leq \|h\|^2$ (vgl. Analysis I)

Somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2$ konvergent, also $\sum_{n=M}^{N} |h_n|^2 \to 0$ für $N, M \to \infty$.
Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(t)$ absolut und gleichmäßig.

$$\left\|f - \sum_{n=1}^{N} f_n u_n\right\| = \left\|M\left(h - \sum_{n=1}^{N} h_n u_n\right)\right\|$$

$\left(h - \sum_{n=1}^{N} h_n u_n\right) \in E_N$, denn $\left\langle h - \sum_{n=1}^{N} h_n u_n, u_m\right\rangle = \langle h, u_m\rangle - \sum_{n=1}^{M} h_n \underbrace{\langle u_n, u_m\rangle}_{=\delta_{nm}} = \langle h, u_m\rangle - h_m = 0$ für $m = 1, \ldots, N$.

Somit $\left\|M\left(h - \sum_{n=1}^{N} h_n u_n\right)\right\| \leq |\mu_{N+1}| \cdot \underbrace{\left\|h - \sum_{n=1}^{N} h_n u_n\right\|}_{\leq 2\|h\|}$.

Insgesamt:
$\left\|f - \sum_{n=1}^{N} f_n u_n\right\| \to 0$ für $N \to \infty$.
Also gilt $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n$.

□

Beispiel 5.24.
Betrachte $Lu := -u'' = \lambda u$, $R_1 u := u(0) = 0, R_2 u := u(1) = 0$.

Für $\lambda = 0$ ist $u_1(t) := 1$, $u_2(t) := t$ ein Fundamentalsystem von $Lu = 0$. Es gilt
$\Delta(\lambda)\,|_{\lambda=0} = \det\begin{pmatrix} R_1 u_1 & R_1 u_2 \\ R_2 u_1 & R_2 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.
Also ist 0 kein Eigenwert von A.

Für $\lambda \neq 0$ ist $u_1(t) := \exp(\sqrt{-\lambda}t)$, $u_2(t) := \exp(-\sqrt{-\lambda}t)$ ein Fundamentalsystem.
Jetzt ist $\Delta(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}} & e^{-\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}} - e^{\sqrt{-'}}$.

Wir müssen die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ lösen.
$\Delta(\lambda) = 0 \Leftrightarrow e^{-\sqrt{-\lambda}} = e^{\sqrt{-\lambda}} \Rightarrow e^{2\sqrt{-\lambda}} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{-\lambda} = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \underbrace{\{0\}}_{\lambda \neq 0}$

Also ist λ ein Eigenwert genau dann, wenn $\lambda = (k\pi)^2$.
Die zugehörigen Eigenfunktionen sind $u_k(t) := d_k \cdot \sin(k\pi t)$ für $k \in \mathbb{N}$. Dabei sind d_k Konstanten, so dass $\|u_k\| = 1$.

Nach Satz 5.23 gilt für $f \in D(A)$, d.h. $f \in C^1([0,1];\mathbb{C})$ mit $f(0) = f(1) = 0$:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(k\pi t)$$

mit $f_k = const \cdot \int_0^1 f(t) \sin(k\pi t)\, dt$.

Dies ist ein Spezialfall der komplexen Fourier-Reihe aus Analysis I: da $f(0) = 0$, lässt sich f als ungerade Funktion auf das Intervall $[-1,1]$ fortsetzen. Die komplexe Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion ist aber eine sin-Reihe.

Dieses Beispiel ist nur eines von vielen. Entwicklungen nach Eigenfunktionen sind viel allgemeiner, z.B. nach orthogonalen Polynomen (z.B. Hermit-Polynome) oder nach Bessel-Funktionen.