Skript zur Vorlesung

Analysis III
Teil II - Funktionentheorie

Wintersemester 2005/06

Universität Konstanz
Prof. Dr. Robert Denk

private Mitschrift

Stand: 17. Februar 2006
www.meidert.net/uni

Achtung:
Dies ist kein offizielles Skript, sondern nur eine private Mitschrift. Ich kann daher keine Gewähr für die Richtigkeit und Vollständigkeit übernehmen. Vor allem können die Nummerierungen zum Teil von den in den Vorlesungen verwendeten abweichen. Falls jemand einen Fehler entdeckt, so möge er/sie mir bitte eine eMail schicken - vielen Dank!

Frieder Meidert (uni@meidert.net)

Inhaltsverzeichnis

6. Holomorphe Funktionen

Worum geht's? 6.1.
Holomorphe Funktionen sind Funktionen $f : O \to \mathbb{C}$ ($O \subseteq \mathbb{C}$ offen), die in jedem $z \in O$ komplex differenzierbar sind, d.h. es existiert $\lim\limits_{h \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, h \to 0} \frac{1}{h}(f(z+h) - f(z)) \in \mathbb{C}$ für alle $z \in O$.
Holomorphe Funktionen haben einige überraschende Eigenschaften, z.B.

- sind sie beliebig oft differenzierbar
- werden sie immer lokal durch ihre Taylorreihe dargestellt
- sind zwei holomorphe Funktionen schon gleich, wenn sie nur auf einer Menge mit Häufungspunkt übereinstimmen

Funktionentheorie hat viele Anwendungen, z.B.

- Fundamentalsatz der Algebra
- Funktionalanalysis
- analytische Zahlentheorie

a. Definition und erste Eigenschaften

Im Folgenden schreiben wir meist
$z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$;
$f = u + iv$ für $u, v : O \to \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ ist sowohl ein $\mathbb{R}$- als auch ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, es gibt also bezüglich $\mathbb{R}$ lineare Abbildungen und bezüglich $\mathbb{C}$ lineare Abbildungen sind immer auch $\mathbb{R}$-linear, umgekehrt stimmt dies im Allgemeinen nicht.

Lemma 6.2.

(a) *Eine Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{R}$-linear, falls gilt*

$$T(z) = T(1)x + T(i)y = \lambda z + \mu \bar{z} \textit{ mit } z \in \mathbb{C}$$

wobei $\lambda = \frac{1}{2}(T(1) - iT(i))$ und $\mu = \frac{1}{2i}(T(1) + iT(i))$.

(b) Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{C}$-linear, wenn

$$T(i) = iT(1)$$

(d.h. falls $\mu = 0$) gilt. In diesem Fall gilt $T(z) = T(1)z$.

Beweis:

(a) ✓ (Darstellung bezüglich der ($\mathbb{R}$-)Basis $(1, i)$)
$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ liefert den zweiten Teil.

(b) Aus $T(i) = iT(1)$ folgt $T(z) = T(1) \cdot z$, also ist T $\mathbb{C}$-linear.

□

Wir identifizieren $\mathbb{C} = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot i$ mit $\mathbb{R}^2$.

Lemma 6.3.
Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sind äquivalent:

(i) Die von A induzierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist $\mathbb{C}$-linear.

(ii) Es gilt $c = -b$ und $d = a$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ und $T(z) = (a + ic)z$

Beweis:

„$\Leftarrow$" Hier ist $T(z) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - cy \\ cx + ay \end{pmatrix} = ax - cy + (cx + ay) \cdot i = (a + ic)x + (a + ic)iy$

„$\Rightarrow$" Nach 6.2 gilt $T(i) = iT(1)$.
Es gilt $T(i) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b + id$ und $iT(1) = i\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = i + (a + ic) = -c + ia$
$\Rightarrow b = -c$ und $d = a$.

□

Wir schreiben häufig Tz statt $T(z)$ für lineare Abbildungen T.
Im Folgenden sei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt also $\langle z, w\rangle = Re(z) \cdot Re(w) + Im\,(z) \cdot Im\,(w)$.
Es gilt $|z|^2 = \langle z, z\rangle$.

Seien $z, w \in \mathbb{C}^*(= \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Für den Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen z und w schreiben wir $\sphericalangle(w, z)$ und es gilt $\cos(\sphericalangle(w, z)) = \frac{\langle z,w\rangle}{|z|\cdot|w|}$.

Definition 6.4.
Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt winkeltreu, falls sie injektiv (also bijektiv) ist und $|w| \cdot |z| \cdot \langle Tw, Tz\rangle = |Tw| \cdot |Tz| \cdot \langle w, z\rangle$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Lemma 6.5.
Sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear. Dann ist T genau dann winkeltreu, falls ein $a \in \mathbb{C}^*$ existiert mit

$$\begin{aligned} Tz = az \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ oder} \\ Tz = a \cdot \overline{z} \text{ für alle } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Beweis:

„$\Leftarrow$" ✓

„$\Rightarrow$" Sei T winkeltreu. Weil T injektiv ist, ist $a := T1 \neq 0$. Wir setzen $b := \frac{1}{a\cdot i}Ti$. Dann ist
$0 = \langle i, 1\rangle = \langle Ti, T1\rangle = \langle abi, a\rangle = |a|^2 \langle bi, 1\rangle \Rightarrow b \in \mathbb{R}$.
Weil T $\mathbb{R}$-linear ist, gilt $Tz = (T1) \cdot x + (Ti) \cdot y = ax + iaby = a(x + iby)$.

Für $z \in \mathbb{C}^*$ folgt $\frac{x}{|x+iy|} = \frac{\langle 1,z\rangle}{|1|\cdot|z|} = \frac{\langle T1,Tz\rangle}{|T1|\cdot|Tz|} = \frac{\langle a,a(x+iby)\rangle}{|a|^2|x+iby|} = \frac{x}{|x+iby|}$.
Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}i)$ gilt damit $x^2 + y^2 = x^2 + b^2y^2$, also $b = \pm 1$. Folglich ist $Tz = az$ für alle $z \in \mathbb{C}$ oder $Tz = a\overline{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

□

Bemerkung: sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear, $T \neq 0$. Es gilt $T \in O(2)$ (orthogonale Gruppe) $\langle Tz, Tw\rangle = \langle z, w\rangle$.
Wenn T auch $\mathbb{C}$-linear ist, dann hat T eine Matrixdarstellung der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ und $\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$, also $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}T \in SO(2)$, ist also eine Drehung und T eine

Drehstreckung.

Wie bisher heißt $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, wenn G offen und zusammenhängend ist.

Erinnerung: Sei X ein metrischer Raum. Dann heißt $M \subseteq X$ zusammenhängend, falls aus M und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von M sind, die zugleich offen und abgeschlossen in M sind.

Aus der Analysis II verwenden wir folgenden Satz:
Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

Lemma.
Sei X ein metrischer Raum, $M \subseteq X$ wegzusammenhängend. Dann ist M zusammenhängend.

Beweis:
Sei $N \subseteq M$ offen und abgeschlossen in M und nicht leer. Zu zeigen: $N = M$.
Sei $x \in M$ und $y \in N$. Nach Voraussetzung gibt es einen Weg $\gamma : [a, b] \to M$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Weil γ stetig ist, gilt $\gamma^{-1}(N)$ offen und abgeschlossen in $[a, b]$, insbesondere ist $x = \gamma(a) \in N$.
Folglich $N = M$, damit M zusammenhängend.

$\square$

Satz 6.6.
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist G genau dann wegzusammenhängend, wenn es zusammenhängend ist. Wege können dabei sogar achsenparallel gewählt werden.

Beweis:
Sei G zusammenhängend und $z_0 \in G$. Wir definieren $f : G \to \mathbb{R}$ durch

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{, falls es einen achsenparallelen Weg von } z_0 \text{ nach } z \text{ gibt;} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen: f ist stetig.
Sei $z \in G$ und $\varepsilon > 0$ mit $B := B(z, \varepsilon) \subseteq G$. Jeder Punkt in B ist mit z über einen achsenparallelen Weg verbunden, also ist $f|_B$ konstant. Insbesondere ist f in z stetig.
Somit ist f stetig und $f^{-1}(\{0\})$ und $f^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen. Es gilt $G = f^{-1}(\{0\} \cup \{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$. Folglich ist $f^{-1}(\{1\})$ auch offen. Wegen $z_0 \in f^{-1}(\{1\})$, gilt $f^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$. Da G zusammenhängend ist, gilt $f^{-1}(\{1\}) = G$.
Also ist G wegzusammenhängend.

$\square$

Definition 6.7.
Sei $\mathbb{C} \supset G \neq \emptyset$ offen. Eine **Zusammenhangskomponente** von G ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge von G (d.h. es existiert keine zusammenhängende echte Obermenge, die noch in G enthalten ist).

Zusammenhangskomponenten sind offen und abgeschlossen in G. D.h., sie sind offen und abgeschlossen in G als metrischem Raum versehen mit der induzierten Metrik von $\mathbb{C}$.

Zwei Punkte in G heißen **wegäquivalent**, falls sie durch einen Weg in G verbunden werden können. Die Äquivalenzklassen sind gerade die Zusammenhangskomponenten.

Definition 6.8.
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen.

(a) Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt komplex **differenzierbar** in $z \in G$, falls der Grenzwert $f'(z) := \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \in \mathbb{C}$ existiert.

(b) $f : G \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph in** G, falls f an jeder Stelle $z \in G$ komplex differenzierbar ist. f heißt **holomorph an der Stelle** $z \in G$, falls eine offene Umgebung U von z existiert mit $U \subset G$, $f|_U$ ist holomorph in U.

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **ganz** (engl.: entire), falls f in $\mathbb{C}$ holomorph ist.

Bemerkung 6.9.

(a) Oben heißt „$\lim\limits_{h\to 0}$“ natürlich „$\lim\limits_{h\to 0, h\in\mathbb{C}, h\neq 0}$“.

(b) Eine äquivalente Definition ist:
$f : G \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z \in G$, falls eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $T_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ existiert mit $f(z+h) = f(z) + T_z h + |h| r(z,h)$ für „kleine h“mit $\lim\limits_{h\to 0} r(z,h) = 0$ (vgl. Analysis II).
Nach Lemma 6.2 ist jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung T von der Form $Th = c \cdot h$ mit einem $c \in \mathbb{C}$. Nach Definition 6.8 ist $f'(z) := c$.

Beispiele 6.10.

(a) $f(z) := z^n$. Wegen $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \ldots + z_0^{n-1} \to n z_0^{n-1}$ für $z \to z_0$ ist f holomorph in $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = nz^{n-1}$ (ganze Funktion)

(b) $f(z) := |z|^2 = z\overline{z}$. An der Stelle $z_0 = 0$ ist f komplex differenzierbar, wegen $\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = \frac{|h|^2}{h} = \overline{h} \to 0$ für $h \to 0$.
Aber: für $z_0 \neq 0$ ist f nicht komplex differenzierbar, denn:
$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{(z_0+h)\overline{(z_0+h)}-z_0\overline{z_0}}{h} = \frac{h\overline{z_0}+z_0\overline{h}+h\overline{h}}{h} = \overline{z_0} + \overline{h} + z_0\frac{\overline{h}}{h}$. Aber $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$ existiert nicht ($\frac{\overline{h}}{h} = 1$, falls $h \in \mathbb{R}$; $\frac{\overline{h}}{h} = -1$, falls $h \in i\mathbb{R}$).
f ist also an keiner Stelle holomorph, auch nicht bei $z = 0$!

Bemerkung 6.11.
Für das Rechnen mit komplex differenzierbaren Funktionen gelten dieselben Regeln wie im Reellen.
(z.B. Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, ...; wörtlich gleiche Beweise).

Satz 6.12 (Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen)**.**
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f = u + iv : G \to \mathbb{C}, z \in G$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist komplex differenzierbar in z.

(ii) f ist reell differenzierbar in z, und die Ableitung $f'(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.

(iii) f ist reell differenzierbar in z, und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\boxed{\partial_x u(z) = \partial_y v(z), \partial_y u(z) = -\partial_x v(z)}$$

Beweis:
(i) $\Leftrightarrow$ (ii) ist klar nach Definition bzw. Bemerkung 6.9.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): die reelle Ableitung von f an der Stelle z ist $f'(z) = \begin{pmatrix} \partial_x u(z) & \partial_y u(z) \\ \partial_x v(z) & \partial_y v(z) \end{pmatrix}$.
Nach Lemma 6.3 ist $f'(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear, falls $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$ an der Stelle z.

□

Bemerkung 6.13.
Betrachte für eine reell differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ die Ableitung $T := f'(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so lässt sich die komplexe Differenzierbarkeit durch verschiedene Bedingungen beschreiben. Definiere
$\partial_x f := \partial_x u + i\partial_x v$, d.h. $\partial_x f(z) = T(1)$
$\partial_y f := \partial_y u + i\partial_y u$, d.h. $\partial_y f(z) = T(i)$
$\partial f := \partial_z f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)$, d.h. $\partial_z f(z) = \frac{1}{2}(T(1) - iT(i)) = \lambda$

$\overline{\partial} f := \partial_{\overline{z}} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$, d.h. $\overline{\partial} f(z) = \frac{1}{2}(T(1) + T(i)) = \mu$ (vgl. Lemma 6.2)

Formal kommt man auf die letzten beiden Definitionen dadurch, dass man z und $\overline{z}$ als unabhängige Variablen betrachtet.
$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = -\frac{i}{2}$
$\partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\partial_x f - \frac{i}{2}\partial_y f$.

Damit: sei $f : G \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(i) f ist in z komplex differenzierbar;

(ii) es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen;

(iii) es gilt $i\partial_x f(z) = \partial_y f(z)$;

(iv) es gilt $\overline{\partial} f(z) = 0$.

In diesem Fall ist $\boxed{f'(z) = \partial_x f(z) = \partial_z f(z)}$

Z.B. $f(z) = \overline{z} \Rightarrow \partial_{\overline{z}} f(z) = 1 \neq 0$, d.h. f ist nirgends komplex differenzierbar.
$f(z) = |z|^2 = z\overline{z} \Rightarrow \partial_{\overline{z}} f(z) = z \neq 0$, falls $z \neq 0$.

Korollar 6.14.
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann konstant in G, falls f holomorph ist mit $f' = 0$ in G.

(b) Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in G$. Dann ist f konstant.

(c) Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| = 1$ für $z \in G$. Dann ist f konstant.

Beweis:

(a) Sei f holomorph in G mit $f' = 0$. Dann ist $0 = f_x(z) = u_x(z) + iv_x(z)$. (schreibe $f_x := \partial_x f$)
Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen: $v_y = 0$ in G, $u_y = 0$ in G. Damit ist $\nabla u = \nabla v = 0$ in G. Da G wegzusammenhängend ist, folgt nach Analysis II: $u = const$, $v = const$.

(b) Es gilt $v = 0$ in G und mit Cauchy-Riemann folgt $u_x = u_y = 0$ in G. Rest mit (a).

(c) Es gilt $u^2 + v^2 = 1$ in G und damit $uu_x + vv_x = 0$ und $uu_y + vv_y = 0$.
Mit Cauchy-Riemann: $uv_x = -uu_y = vv_y = vu_x$.
Damit $0 = u^2u_x + uvv_x = u^2u_x + v^2u_x = \underbrace{(u^2 + v^2)}_{=1}u_x = u_x$.

Analog $v_x = 0$ und damit $f_x = 0$. Rest mit (a).

□

Definition 6.15.
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f **durch Potenzreihen dargestellt**, falls für jedes $a \in G$ und jedes $r > 0$ mit $B(a,r) : \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\} \subset G$ eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ existiert, welche mindestens in $B(a,r)$ konvergiert und dort gleich f ist.

ACHTUNG: die Potenzreihe muss im vorher gewählten Kreis $B(a,r)$ konvergieren! Der Konvergenzradius muss mindestens r sein, wobei r maximal gewählt werden kann mit $B(a,r) \subset G$.
Die Definition lautet *nicht*: zu $a \in G$ existiert ein in einer Umgebung von a konvergente Potenzreihe.

Satz 6.16.
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ durch Potenzreihen dargestellt.

(a) f ist holomorph in G mit $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$.
Diese Reihe hat denselben Konvergenzradius wie die Reihe für f.

(b) f ist unendlich oft komplex differenzierbar in G mit $f^{(k)}(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k}$.
Insbesondere ist $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, d.h. die Potenzreihe ist durch f eindeutig bestimmt.

Beweis:

(a) Sei ohne Einschränkung $a = 0$. Setze $g(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_nz^{n-1}$. Die Reihe für g hat denselben Konvergenzradius wie die Reihe für f; insbesondere Konvergenz

in $B(0,r)$, falls $B(0,r) \subset G$.
Für $w \in B(0,r)$, $|w| < \rho < r$, $|z| < \rho$ gilt:
$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{z^n-w^n}{z-w} - nw^{n-1}\right)$

$\frac{z^n-w^n}{z-w} - nw^{n-1} = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left(z^j w^{n-1-j} - w^{n-1}\right) = (z-w) \sum\limits_{j=1}^{n-1} w^{n-1-j} \frac{z^j-w^j}{z-w}$
$= (z-w) \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left(w^{n-1-j} \sum\limits_{k=0}^{j-1} z^k w^{j-1-k}\right)$
Wegen $|z|, |w| < \rho$, erhält man $\left|\frac{z^n-w^n}{z-w} - nw^{n-1}\right| \leq |z-w| \cdot \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left(\rho^{n-1-j} \sum\limits_{k=0}^{j-1} \rho^{j-1}\right)$
$= |z-w| \cdot \sum\limits_{j=1}^{n-1} j\rho^{n-2} = |z-w|\rho^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}$.

Damit $\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\right| \leq \underbrace{\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n| \cdot \rho^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\right)}_{\leq\infty,\ \text{da}\ \rho<r} |z-w| \to 0$ für $z \to w$.
Somit ist f komplex differenzierbar mit $f' = g$.

(b) Wende (a) auf f', f'' usw. an.

□

Beispiele 6.17.

(a) Polynome $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n z^n$ sind in $\mathbb{C}$ holomorph, also ganze Funktionen.

(b) Die Exponentialfunktion $\exp(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$ hat den Konvergenzradius ∞, ist also eine ganze Funktion.
Wie in $\mathbb{R}$ setze

$$\boxed{\exp(iz) = \cos z + i \sin z}$$

mit $\cos z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $\sin z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.
Damit

$$\boxed{\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz});\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})}$$

Hyperbolische Funktionen:

$$\boxed{\cosh z := \cos(iz) = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z});\ \tfrac{1}{i}\sinh z := \sin(iz) = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z})}$$

b. Integration

Wesentliche Zutat der Funktionentheorie sind Kurvenintegrale. Kurven sind Äquivalenzklassen von Wegen. Für eine Kurve Γ sind Anfangs- und Endpunkt $\mathcal{A}(\Gamma), \mathcal{E}(\Gamma)$, Wertebereich und $\mathcal{R}(\Gamma)$ und Länge $\mathcal{L}(\Gamma)$ wohldefiniert.

Definition 6.18.
Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$ mit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Sei $f : \mathcal{R}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Definiere das **Kurvenintegral**

$$\int_\Gamma f := \int_\Gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \in \mathbb{C}.$$

Bei stückweise glattem γ setze die rechte Seite aus den Integralen über die glatten Teile zusammen.

Im folgenden sind alle Kurven stückweise glatt. Daher ab sofort: ***Kurve = stückweise glatte Kurve!!***

Beispiele 6.19.

(a) $\int_\Gamma 1 = \int_a^b \gamma'(t)\,dt = \gamma(b) - \gamma(a) = \mathcal{E}(\Gamma) - \mathcal{A}(\Gamma).$

(b) Sei $a \in \mathbb{C}, r > 0, \Gamma$ der positiv orientierte Kreis um a mit Radius r, d.h. $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma(t) := a + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Sei $f(z) := (z-a)^n, n \in \mathbb{Z}$.
Dann $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot rie^{it}\,dt = r^{n+1} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = \begin{cases} 0 & , n \neq -1; \\ 2\pi i & , n = -1. \end{cases}$

Satz 6.20.
Sei Γ eine Kurve, $f : \mathcal{R}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig.

(a) $\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leq \max_{z \in \mathcal{R}(\Gamma)} |f(z)| \cdot \mathcal{L}(\Gamma)$, *wobei* $\mathcal{L}(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ *(Länge von Γ).*

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\mathcal{R}(\Gamma) \subset G$ und F eine Stammfunktion zu f in G, d.h. F ist holomorph in G mit $F' = f$. Dann ist

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) + F(\gamma(a)) = F(\mathcal{E}(\Gamma)) - F(\mathcal{A}(\Gamma)).$$

Beweis:

(a) $\left|\int\limits_\Gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \leq \sup\limits_{z\in\mathcal{R}(\Gamma)} |f(z)| \cdot \int\limits_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$

(b) $\int\limits_\Gamma f = \int\limits_\Gamma F' = \int\limits_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$

□

Satz 6.21.
Sei Γ eine Kurve, $g : \mathcal{R}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Definiere $f(z) := \int\limits_\Gamma \frac{g(w)}{w-z}\,dw$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma) =: G$. Dann ist f in G in Potenzreihen entwickelbar und insbesondere holomorph in G.

Beweis:
Sei $a \in G$ und $r > 0$ mit $B(a,r) \subset \Gamma$.
Für $z \in B(a,r)$ und $w \in \mathcal{R}(\Gamma)$ ist
$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \left((w-a)\left[1 - \frac{z-a}{w-a}\right]\right)^{-1} =$
$\frac{1}{w-a} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n$ (Konvergenz wegen $|z-a| < r < |w-a|$)
$\Rightarrow \frac{g(w)}{w-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{g(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n.$

Für $0 < \rho < r$ konvergiert die Reihe in $\overline{B(0,\rho)} \subset B(0,r)$ absolut und gleichmäßig und man darf Integration und Summation vertauschen:
$f(z) = \int\limits_\Gamma \frac{g(w)}{w-z}\,dw = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ mit $c_n := \int\limits_\Gamma \frac{g(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw.$

□

Definition und Satz 6.22.
Sei $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ definiert man die ***Windungszahl*** *von Γ um z durch*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw.$$

Dann ist $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$, und auf jeder Zusammenhangskomponente von $G = \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ ist Ind_Γ konstant. Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von G ist $\mathrm{Ind}_\Gamma = 0$.

Beachte: $\mathcal{R}$ ist kompakt, d.h. $\exists\ R > 0$ mit $\mathbb{C} \setminus B(0,R) \subset G$. Da $\mathbb{C} \setminus B(0,R)$ zusammenhängend ist, existiert genau eine Zusammenhangskomponente Z von G mit

$\mathbb{C} \setminus B(0,R) \subset Z$. Dieses Z ist die unbeschränkte Zusammenhangskomponente.

Beweis:

(i) Sei $z \in G$. Es ist $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$, wobei $\Gamma = [\gamma], \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.
Setze $\varphi(s) := \exp\left(\int\limits_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt\right)$ für $s \in [a,b]$.
$\Rightarrow \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}$ (bis auf endlich viele Punkte, in denen $\gamma'(s)$ nicht existiert).
$\Rightarrow \left(\frac{\varphi}{\gamma-z}\right)' = \frac{(\gamma-z)\varphi'-\varphi\gamma'}{(\gamma-z)^2} = 0$.
Da $\frac{\varphi}{\gamma-z}$ stetig ist, folgt $\frac{\varphi}{\gamma-z}$ ist konstant.
$\Rightarrow \frac{\varphi(b)}{\gamma(b)-z} = \frac{\varphi(a)}{\gamma(a)-z} = \frac{1}{\gamma(a)-z}$.
Wegen $\gamma(b) = \gamma(a)$ folgt $\varphi(b) = 1$.

$\Rightarrow \int\limits_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt \in \mathbb{Z} \cdot 2\pi i$. $\qquad (e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

(ii) Nach Satz 6.21 ist Ind_Γ holomorph auf G und damit stetig.
Da das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge wieder zusammenhängend ist, ist Ind_Γ auf jeder Zusammenhangskomponente von G konstant.

(iii) Für $|z| \to \infty$ gilt: $\sup\limits_{w \in \mathcal{R}(\Gamma)} \left|\frac{1}{w-z}\right| \to 0$, damit nach Satz 6.20 (a): $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$.
$\Rightarrow \mathrm{Ind}_\Gamma = 0$ für große z.

□

Definition 6.23 (Logarithmus)**.**

(a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z$ für $z \in G$ heißt ein **stetiger Zweig des Logarithmus auf** G.

(b) Allgemeiner: sei $M \subset \mathbb{C}$, $g : M \to \mathbb{C}$ stetig. Eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = g(z)$ heißt ein **stetiger Logarithmus von** g.
In diesem Fall heißt $\arg g(z) := \mathit{Im}\ f(z)$ eine **Argumentfunktion**.

Bemerkung 6.24.

(a) Die exp-Funktion hat den Wertebereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ist aber nicht injektiv. Auf jedem Streifen $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < Im\, z \leq \alpha + 2\pi\}$ ist exp injektiv, aber die Umkehrfunktion ist nicht stetig.

(b) In 6.23 (b) gilt: $g(z) = \exp(f(z)) = |g(z)| \exp(iIm\, f(z))$.
Daher ist $Im\, f(z)$ der Winkel der komplexen Zahl $g(z)$ in Bogenlänge; daher die Bezeichnung Argument.

Definition und Satz 6.25.

(a) Sei $S_0 := \{z \in \mathbb{C} : |Im\, z| < \pi\}$.
*Dann wird durch $\ln := (\exp|_{S_0})^{-1}$ ein stetiger Zweig $\ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to S_0 \subset \mathbb{C}$ definiert, der sogenannte **Hauptzweig des Logarithmus**. Die zugehörige Argumentfunktion ist $\arg : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to (-\pi, \pi)$, $z \mapsto Im\ \ln(z)$.*

(b) Falls G ein Gebiet ist, unterscheiden sich zwei stetige Zweige des Logarithmus durch ein Vielfaches von $2\pi i$.

(c) Jeder stetige Zweig f des Logarithmus auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist holomorph mit $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Beweis:

(i) klar.

(ii) Seien f, g stetige Zweige. Für $h := f - g$ gilt: $\exp(h(z)) = \exp(f(z) - g(z)) = \frac{\exp(f(z))}{\exp(g(z))} = \frac{z}{z} = 1$ für $z \neq 0$ und damit $h(z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Da h stetig, G zusammenhängend, folgt: h ist konstant auf G.

(iii) wie in Analysis I: sei $G \ni z_k \to z \in G$, $y_k : \ln z_k$, $y := \ln z$.
Dann gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln z_k - \ln z}{z_k - z} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{y_k - y}{\exp(y_k) - \exp(y)} = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{z}$.

□

Bemerkung 6.26.
Nach dem letzten Satz existiert immer zumindest lokal ein stetiger Zweig des Logarithmus: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, $t_0 \in [a, b]$.

Falls $\gamma(t_0) \in (0, \infty)$, wähle den Hauptzweig $f(t) := \ln \gamma(t)$.
Für $|t - t_0|$ klein gilt dann $\exp(f(t)) = \gamma(t)$ *(denn $\gamma(t) \notin (-\infty, 0]$ für $|t - t_0|$ klein).*

Falls $\gamma(t_0) \notin (0, \infty)$, schreibe $\gamma(t_0) = |\gamma(t_0)|e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und setze $f(t) := \ln(\gamma(t)e^{i\varphi}) + i\varphi$.

Mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments kann man leicht zeigen: zu γ existiert eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(t)) = \gamma(t)$ für $t \in [a, b]$.
Achtung: Im Allgemeinen existiert *keine* stetige Funktion $f : \mathcal{R}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z$ für $z \in \mathcal{R}(\Gamma)$.

Bemerkung 6.27 (Anschauliche Bedeutung der Windungszahl)**.**
Sei $\Gamma = [\gamma]$, $\gamma : [, b] \to \mathbb{C}$, $z \notin \mathcal{R}(\Gamma)$.
Setze $\widetilde{\gamma} : \gamma - z$. Nach Bemerkung 6.26 existiert ein stetiges $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(t)) = \widetilde{\gamma}(t)$.

$$\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt = \int_a^b \frac{(\widetilde{g}(t)+z)'}{\widetilde{\gamma}(t)}\,dt = \int_a^b \frac{\exp(f(t))f'(t)}{\exp(f(t))}\,dt = \int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

Falls Γ geschlossen ist, so ist $\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} \in 2\pi i\mathbb{Z}$,
d.h. $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi}[\underbrace{Im\ f(b)}_{\arg\gamma(b)} - Im\ f(a)]$.
Damit gibt $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)$ den Zuwachs des Argument einer Parametrisierung an.

Beispiel 6.28.

(a) Sei Γ die positiv orientierte Kreislinie um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius r.
Dann ist $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \begin{cases} 1 & , |z-a| < r; \\ 0 & , |z-a| > r. \end{cases}$

(b) Sei Γ eine geschlossene Kurve, $n \in \mathbb{Z}$ und $0 \notin \mathcal{R}(\Gamma)$ falls $n < 0$. Dann ist
$\int_\Gamma z^n\,dz = \begin{cases} 0 & , n \neq -1; \\ 2\pi i \operatorname{Ind}_\Gamma(0) & , n = -1. \end{cases}$
Für $n = -1$ ist dies die Definition, für $n \neq -1$ ist $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion zu z^n, und damit (da Γ geschlossen) das Integral 0 (siehe Satz 6.20 (b)).

Satz 6.29.
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:

(i) f hat auf G eine holomorphe Stammfunktion;

(ii) für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$ ist $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

Falls G zusätzlich konvex ist (und damit insbesondere ein Gebiet), so ist dies äquivalent zu

(iii) für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ ist $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.
(durchlaufe $\partial\Delta$ in positiver Richtung)
(G konvex: $\Leftrightarrow\ \forall\, x, y \in G\ \forall\, \alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha)y \in G$)

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Satz 6.20 (b).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei Z eine Zusammenhangskomponente von G. Dann ist Z offen und zusammenhängend, also wegzusammenhängend. Wähle $a \in Z$ fest und setze $F(z) := \int\limits_{\Gamma_z} f(w)\,dw$ für $z \in Z$, wobei Γ_z eine Kurve von a nach z ist. Dann ist F wohldefiniert nach (ii).
Sei $z_0 \in Z$. Für $|z - z_0|$ klein kann man als Γ den Weg $\Gamma_{z_0} + s_{z_0 z}$ wählen, wobei $s_{z_0 z}$ die Strecke von z_0 nach z ist.

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{z-z_0}\int\limits_{s_{z_0 z}} f(w)\,dw - f(z_0)\right|$$
$$= \left|\frac{1}{z-z_0}\int\limits_0^1 f(z_0 + t(z-z_0))(z-z_0)\,dt - f(z_0)\right| = \left|\int\limits_0^1 \left(f(z_0+t(z-z_0)) - f(z_0)\right)\,dt\right|$$
$$\leq \int\limits_0^1 \left|f(z_0+t(z-z_0)) - f(z_0)\right|\,dt \leq \sup_{w\in s_{z_0 z}} \left|f(w) - f(z_0)\right| \to 0 \text{ für } z \to z_0.$$

Also ist F holomorph mit $F' = f$. Führt man diese Konstruktion für alle Zusammenhangskomponenten durch, so erhält man eine Stammfunktion auf G.

Falls G konvex ist, kann man $\Gamma_{z_0} := s_{a z_0}$ wählen, und man braucht nur die Wegunabhängigkeit für Dreiecke, also Voraussetzung (iii).

$\square$

7. Der Cauchysche Integralsatz und die Sätze von Morera und Liouville

Worum geht's? 7.1.
Die wichtigsten Begriffe sind die Holomorphie, Darstellung durch Potenzreihen und Kurvenintegrale. In diesem Abschnitt wird die Äquivalenz entsprechenden Eigenschaften gezeigt, mit starken Folgerungen (z.B. f holomorph $\Rightarrow f \in C^\infty$). Es folgt unter anderem der Fundamentalsatz der Algebra.

Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$.

f holomorph (mit Satz von Morera) $\Leftrightarrow$ (mit Lemma von Goursat) $\int\limits_{\partial\Delta} f = 0$.

f holomorph (mit 6.16) $\Leftrightarrow$ (mit Cauchyscher Integralformel) f ist durch Potenzreihen dargestellt.

f ist holomorph $\Leftrightarrow$ (mit Cauchyschem Integralsatz) $\int\limits_{\Gamma} f = 0$ (mit 6.29) $\Leftrightarrow$ (mit 6.29) f besitzt eine Stammfunktion

Satz 7.2 (Lemma von Goursat).
Sei G ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$: $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)z = 0$.

Beweis:
Teile Δ in 4 kleinere Dreiecke Δ_1^j für $j = 1, \ldots, 4$, die durch die Seitenmitten (von Δ) gebildet werden.

$$\left|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| = \left|\sum_{j=1}^{4} \int\limits_{\partial\Delta_1^j} f(z)\,dz\right| \leq 4 \max_{j=1,\ldots,4} \left|\int\limits_{\partial\Delta_1^j} f(z)\,dz\right|.$$

Das Maximum wird bei einem der vier Integrale angenommen. Nenne das entsprechende Dreieck Δ_1.
Unterteile nun Δ_1 analog und erhalte Δ_2 ... Daraus ergibt sich eine Folge $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Dreiecken mit Summe der Seitenlängen $L(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2}L(\partial\Delta_{n-1}) = \ldots = 2^{-n}L(\partial\Delta)$.

$\left|\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right|$. Die Dreiecke $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine Intervallschachtelung in $\mathbb{C}$. Da Δ_n kompakt, existiert genau ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $\{z_0\} \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$.

f ist holomorph $\Rightarrow f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0)$ mit $g(z) \to 0$ für $z \to z_0$.

$$\int_{\partial\Delta} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)]\, dz = 0 \qquad \text{(Beispiel 6.28)}$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} g(z)(z - z_0)\, dz \right| \le L(\partial\Delta_n) \cdot \sup_{z\in\partial\Delta_n} |z - z_0 \cdot |g(z)|$$
$$\le L(\partial\Delta_n)^2 \cdot \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)| \le 4^{-n} \cdot L(\partial\Delta)^2 \cdot \sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|.$$

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \right| \le 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \right| \le 4^n \cdot 4^{-n} \cdot L(\partial\Delta_n)^2 \cdot \underbrace{\sup_{z\in\partial\Delta_n} |g(z)|}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty, \text{ da } z\to z_0} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

□

Bemerkung 7.3.
In Satz 7.2 genügt es, wenn f holomorph in $G \setminus \{p\}$ für ein $p \in G$ und stetig in G ist:

- falls $p \notin \Delta$, ändert sich nichts am Beweis;
- falls p eine Ecke von Δ ist, so ist f holomorph in einer Umgebung von drei der vier Teildreiecken von Δ. Für diese Teildreiecke ist das Integral 0. Also $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz = \int_{\partial\Delta_2} f(z)\, dz = \ldots = \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \to 0$ für $n \to \infty$;
- falls schließlich $p \in \Delta$ beliebig, unterteile Δ zunächst in drei (bzw. zwei, falls $p \in \partial\Delta$) Teildreiecke, bei denen p jeweils an der Spitze liegt. Nach dem eben Gezeigten ist das Integral für über jedes Teildreieck 0.

Iterativ sieht man, dass im Lemma von Goursat genügt: f stetig in ganz G und f holomorph in G bis auf endlich viele Punkte.

Satz 7.4 (Cauchyscher Integralsatz für konvexe Gebiete)**.**
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, f holomorph in G bis auf endlich viele Punkte. Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset G$: $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$.

Beweis:
Nach dem Lemma von Goursat (7.2) bzw. nach Bemerkung 7.3 ist $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$.

Nach Satz 6.29 folgt die Behauptung.

□

Satz 7.5 (Cauchysche Integralformel für konvexe Gebiete).
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $f : G \to G$ holomorph, $\Gamma \subset G$ eine geschlossene Kurve.
Für $z \in G \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ gilt $f(z) \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(w)}{z-w}\, dw$.

Speziell gilt für den Rand des Kreises (positiv orientiert) $B(z,r) \subset G$:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw}$$

Beweis:
Zu $z \in G \setminus \mathcal{R}(\Gamma)$ definiere $g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & , w \neq z; \\ f'(z) & , w = z. \end{cases}$
Da f holomorph ist, ist g stetig in G und holomorph für $w \neq z$.

Nach dem Cauchy-Integralsatz gilt:
$0 = \int\limits_\Gamma g(w)\, dw = \int\limits_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \int\limits_\Gamma \frac{1}{w-z}\, dw = \int\limits_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - 2\pi i f(z) \operatorname{Ind}_\Gamma(z)$.

□

Satz 7.6 (Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen).
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f in G durch Potenzreihen darstellbar und insbesondere unendlich oft komplex (und damit reell) differenzierbar.

Für $a \in G$ und $r_0 > 0$ mit $B(a, r_0) \subset G$ gilt:
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *mit* $\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw}$ *(wobei $0 < r < r_0$).*

Weiter gilt $|c_n| \leq r^{-n} \max\limits_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Beweis:
Da $B(a, r_0)$ konvex ist, können wir die Cauchy-Integralformel auf die Kreislinie $\Gamma_{a,r} = [\gamma_{,r}], \gamma_{a,r}(t) := a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ anwenden.
$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$ für $z \in B(a,r)$.

Nach Satz 6.21 ist f durch Potenzreihen darstellbar, und
$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,r}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$

Beachte, dass das Integral durch $f^{(n)}(a)$ bestimmt ist, d.h. unabhängig von r ist.

$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi i} \underbrace{L(\Gamma_{a,r})}_{=2\pi r} \cdot \max_{w \in \mathcal{R}(\Gamma_{a,r})} |f(w)| r^{-n-1} = r^{-n} \max_{|w-a|=r} |f(w)|.$

□

Satz 7.7 (von Morera)**.**
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig mit $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$ für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$.
Dann ist f holomorph in G.

Beweis:
Betrachte wie in Satz 7.6 $f\,|_{B(a,r)}$. Nach Satz 6.29 hat f holomorphe Stammfunktion F in $B(a,r)$. Nach Satz 7.6 ist $F' = f$ holomorph in $B(a,r)$.

□

Satz 7.8 (von Liouville)**.**
Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis:
Sei f holomorph in $\mathbb{C}$. Nach Satz 7.6 existiert eine Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $|c_n| \leq r^{-n} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq r^{-n} \underbrace{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|}_{<\infty} \to 0$ für $r \to \infty$ und $n \geq 1$.

Somit $c_n = 0$ für $n \geq 1$, d.h. $f(z) = c_0$ ist konstant.

□

Satz 7.9 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Jedes komplexe Polynom P vom Grad $n \geq 1$ besitzt n Nullstellen (inklusive Vielfachheit).

Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt n Eigenwerte.

Beweis:

(i) Für $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ mit $a_n \neq 0$ gilt $|P(z)| \geq |z^n| \cdot \left| |a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right| \geq \frac{|z|^n \cdot |a_n|}{2}$ für $|z| \geq R$ mit $R > 0$ geeignet.
Falls P keine Nullstelle besitzt, ist $\frac{1}{P}$ eine ganze Funktion. Wählt man R so

groß, dass $|P(z)| \geq 1$ für $|z| \geq R$, so gilt $\sup_{z \in \mathbb{C}} \left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \max \left\{ 1, \max_{|z| \leq R} \left| \frac{1}{P(z)} \right| \right\} < \infty$, da $\frac{1}{P}$ als stetige Funktion auf $\{|z| \leq R\}$ beschränkt ist.
Nach dem Satz von Liouville ist $\frac{1}{P}$ konstant, Widerspruch.

(ii) Nach (i) hat P mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $P(z) = (z - \lambda)P_1(z)$ mit $\deg(P_1) = n - 1$. Falls $n - 1 \geq 1$, wende (i) auf P_1 an, usw. Insgesamt erhält man n (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen.

(iii) Die Aussage über Eigenwerte folgt sofort, da die Eigenwerte die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind.

□

8. Isolierte Singularitäten und Laurentreihen

Worum geht's? 8.1.
Die Menge der Nullstellen einer holomorphen Funktion sind abzählbar. Daraus folgt der wichtige Identitätssatz.

Eine isolierte Singularität ist ein Punkt, so dass die Funktion in einer Umgebung, (aber nicht unbedingt im Punkt selbst holomorph) ist. Diese Singularitäten können beschrieben werden, was zu den Laurentreihen und zum Residuum führt.

Definition 8.2.
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen.

(a) Die Menge der in G holomorphen Funktionen wird mit $\mathcal{H}(G)$ bezeichnet.

(b) Die Menge $N(f) := \{a \in G : f(a) = 0\}$ heißt die Nullstellenmenge von f.

Satz 8.3.
Sei G ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G)$. Dann gilt: $N(f) = G$, d.h. $f = 0$, oder $N(f)$ ist abzählbar und hat keinen Häufungspunkt in G.

*In diesem Fall (also $f \neq 0$) existiert zu $a \in N(f)$ eine eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $f(z) = (z-a)^m g(z)$ für ein geeignetes $g \in \mathcal{H}(G)$ mit $g(a) \neq 0$. Die Zahl m heißt die **Nullstellenordnung** von f an der Stelle a.*

Für den Beweis brauchen wir ein Lemma:

Lemma 8.4.
Sei $G \subset C$ offen, dann ist G eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen.

Beweis:
Setze $A_k := \{z \in G : |z| \leq k, \operatorname{dist}(z, \partial G) \geq \frac{1}{k}\}$.
Dann ist $A_k = \overline{G} \cap \varphi_1^{-1}([0,k]) \cap \varphi_2^{-1}([\frac{1}{k}, \infty))$ für die zwei stetigen Funktionen $V_1 : z \mapsto |z|, \varphi_2 : z \mapsto \operatorname{dist}(z, \partial G)$.
Daher ist A_k abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.
Offensichtlich ist $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

□

Beweis: *(von Satz 8.3)*
Sei $H := \{z \in G : z \text{ ist Haeufungspunkt von } N(f)\}$.

(i) Da die Menge der Häufungspunkte von $N(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{G} \subset \mathbb{C}$ sind, ist H abgeschlossen in G (d.h. in der Relativtopologie von G).

(ii) Wir zeigen, dass H auch offen in G ist:
Da f stetig ist, gilt $f(a) = 0$ für $a \in H$. Sei $a \in N(f)$ und $r > 0$ mit $B(a,r) \subset G$. Nach Satz 7.6 gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ für $z \in B(a,r)$. Wegen $f(a) = 0$ folgt $c_0 = 0$. Entweder gilt $c_n = 0$ für alle $n \geq 1$, d.h. $f = 0$ in $B(a,r)$, oder es existiert eine Zahl $m \geq 1$ mit $c_1 = c_2 = \ldots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$. In diesem Fall setze
$$g(z) := \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & , z \in G \setminus \{a\}, \\ c_m & , z = a. \end{cases}$$
Offensichtlich ist $g \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$. Nach Definition von m gilt
$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^{n-m} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}(z-a)^k$ *(wegen $c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$)*.
Die Reihe für g konvergiert in $B(a,r)$, also ist g holomorph (fortsetzbar) an der Stelle a mit $g(a) = c_m \neq 0$.
Da g stetig ist, folgt $g(z) \neq 0$ (und damit $f(z) \neq 0$) für alle $z \neq a$ in einer Umgebung von a.
$\Rightarrow$ a ist die einzige Nullstelle von f in einer Umgebung von a.
$\Rightarrow$ a ist kein Häufungspunkt von $N(f)$.

Für $a \in H$ folgt $f = 0$ in einer Umgebung von a, d.h. $z \in H$ für z in einer Umgebung von a.
$\Rightarrow$ H ist offen in G.

(iii) H ist nach (i) und (ii) offen und abgeschlossen in G. Da G ein Gebiet ist, folgt $H = G$ ($\Rightarrow f = 0$ in G) oder $H = \emptyset$.

(iv) Falls $f \neq 0$ und $K \subset G$ kompakt, kann $K \cap N(f)$ nur endlich sein (sonst hätte $K \cap N(f)$ einen Häufungspunkt in $K \subset G$ - nach Bolzano-Weierstraß).
Nach Lemma 8.4 ist G eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen. $\Rightarrow$ $N(f)$ ist abzählbar.

□

Korollar 8.5 (Identitätssatz)**.**
Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(z) = g(z)$ auf einer Menge, die in G einen Häufungspunkt besitzt. Dann ist $f = g$.

Beweis:
Wende Satz 8.3 auf $f - g$ an.

□

Bemerkung 8.6.
Außerhalb von G kann $N(f)$ einen Häufungspunkt besitzen. Z.B. $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sin \frac{1}{z}$. Dann ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ und 0 ist Häufungspunkt von $N(f)$.

Definition 8.7 (isolierte Singularität)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Ein Punkt $a \in G$ heißt **isolierte Singularität** einer Funktion f, falls $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$ für eine offene Umgebung U von a.
Falls f fortgesetzt werden kann zu einer Funktion, die in einer offenen Umgebung von a (inklusive a) holomorph ist, dann heißt a eine **hebbare Singularität** von f.

Z.B. hat $\frac{\sin z}{z}$ hat eine (durch den Wert 1) hebbare Singularität bei $z = 0$.

Satz 8.8 (Hebbarkeitssatz)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ beschränkt in einer Umgebung von a. Dann ist a eine hebbare Singularität.

Beweis:
Definiere $h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & , z \neq a; \\ 0 & , z = a. \end{cases}$
$\lim\limits_{z \to a} \frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \lim\limits_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$, da f beschränkt bei a.
$\Rightarrow h$ ist komplex differenzierbar in a. $\Rightarrow h \in \mathcal{H}(G)$ (da $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$).

Sei $B(a,r) \subset G$. Dann existiert eine Darstellung $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Es ist $c_0 = h(a) = 0$, $c_1 = h'(a) = 0$. Damit ist $f(z) = (z-a)^{-2} h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n$ für $z \neq a$.
Setze $f(a) := c_2 \Rightarrow f \in \mathcal{H}(G)$.

□

Satz 8.9 (von Casorati-Weierstraß)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in G$, $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$. Dann liegt einer der drei folgenden Fälle vor:

(1) f hat eine hebbare Singularität an der Stelle a. In diesem Fall ist f beschränkt.

(2) Es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $c_{-1}, \dots, c_{-m} \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) - \sum\limits_{n=1}^{m} c_{-n}(z-a)^{-n}$ eine hebbare Singularität an der Stelle a hat. In diesem Fall gilt $|(z)| \to \infty$ für $z \to a$.

(3) *Für jedes $r > 0$ ist der Wertebereich $f(B(a,r) \setminus \{a\})$ dicht in $\mathbb{C}$.*

Definition 8.10.

(a) In obiger Situation liege Fall (2) vor. Dann heißt a ein **Pol der Ordnung** m von f (wähle dabei m minimal) und $\sum_{n=1}^{m} c_{-n}(z-a)^{n-1}$ der **Hauptteil** von f. Der Koeffizient c_{-1} von $(z-a)^{-1}$ heißt das Residuum von f an der Stelle a.

$$\operatorname{res}(f,a) := \operatorname{res}_{z=a} f(z) := c_{-1}$$

(b) Falls Fall (3) vorliegt, heißt a eine **wesentlich Singularität** von f.

Beweis: (von Satz 8.9)
Angenommen, Fall (3) liegt nicht vor. $\Rightarrow\ \exists\, r > 0\ \exists\, w \in \mathbb{C}\ \exists\, \delta > 0$: $|f(z) - w| \geq \delta$ $(z \in \dot{B} := B(a,r) \setminus \{a\})$.
Setze $g(z) := \frac{1}{f(z)-w}$ für $z \in \dot{B}$. Dann ist $g \in \mathcal{H}(\dot{B})$ mit $|g(z)| \leq \frac{1}{\delta}$ für $z \in \dot{B}$.
Nach dem Hebbarkeitssatz gilt $g \in \mathcal{H}(B(a,r))$.

(i) Falls $g(a) \neq 0$, so ist $f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$ in einer Umgebung von a beschränkt, besitzt also eine holomorphe Fortsetzung $f \in \mathcal{H}(G)$. D.h. Fall (1).

(ii) $g(a) = 0$. Nach Satz 8.3 hat g an der Stelle a eine Nullstelle der Ordnung m, d.h. $g(z) = (z-a)^m \widetilde{g}(z)$ für ein $\widetilde{g} \in \mathcal{H}(B(a,r))$ mit $\widetilde{g}(a) \neq 0$.
Nach Definition gilt $g(z) \neq 0$ für $z \in \dot{B}$, d.h. $\widetilde{g}(z) \neq 0$ für $z \in B(a,r)$.
$\Rightarrow h := \frac{1}{\widetilde{g}} \in \mathcal{H}(B(a,r))$.
$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w = (z-a)^{-m} h(z) + w$ für $z \in \dot{B}$.
Schreibe $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$ für $z \in B(a,r)$.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} b_{k+m}(z-a)^k + w = \underbrace{\sum_{k=-m}^{-1} c_k (z-a)^k}_{\textit{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k}_{\textit{holomorph}}$$

□

Definition 8.11.
Für $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ definiere den **Kreisring** $B(a,r,R) := \{z \in \mathbb{C} | r < |z-a| < R\}$.

Lemma 8.12.
Seien $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$, $f \in \mathcal{H}(B(a,r,R))$.
Dann ist $\int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)\,dz$ unabhängig von $\rho \in (r,R)$.

Beweis:
Zerlegt man den Kreisring $B(a,\rho_1,\rho_2)$ für $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ in Sektoren, so kann man darstellen:
$\int\limits_{|z-a|=\rho_2} f(z)\,dz - \int\limits_{|z-a|=\rho_1} f(z)\,dz = \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_j} f(z)\,dz$, wobei die Kurven Γ_j in konvexen Teilbereichen von $B(a,r,R)$ liegen.
Nach dem Cauchy-Integralsatz in konvexen Gebieten ist $\int\limits_{\Gamma_j} f(z)\,dt = 0$ für alle j.

□

Satz 8.13 (Cauchysche Integralformel für Kreisringe)**.**
Seien $a \in \mathbb{C}, 0 \le r < r' < R' < R \le \infty$, $f \in \mathcal{H}(B(a,r,R))$, $z \in B(a,r',R')$. Dann gilt

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw}$$

Beweis:
Wie oben zerlege $B(a,r',R')$ in Sektoren, welche in konvexen Teilen von $B(a,r,R)$ liegen. Dabei sei z auf keiner Trennlinie. Die zugehörigen Kurven seien $\Gamma_1,\dots,\Gamma_n$. Dann liegt z in genau einem Sektor, ohne Einschränkt sei dies das Innere von Γ_1.
Damit $\operatorname{Ind}_{\Gamma_j}(z) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } j = 1; \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$
$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_j} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum\limits_{j=1}^{n} f(z) \cdot \operatorname{Ind}_{\Gamma_j}(z) = f(z)$ nach Cauchy-Integralformel für konvexe Gebiete.

□

Satz 8.14 (Laurentreihe)**.**
Sei $f \in \mathcal{H}(B(a,r,R))$. Dann gilt $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$ für $z \in B(a,r,R)$.

Dabei ist für beliebiges $\rho \in (r,R)$ der Koeffizient c_k gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Beide Reihen $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ *konvergieren gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von* $B(a,r,R)$*.*

Bemerkung 8.15.
Die Reihe in Satz 8.14 heißt Laurentreihe von f an der Stelle a und ist die Verallgemeinerung der Taylorreihe.
Falls sogar $f \in \mathcal{H}(B(a,R))$, dann ist die Laurentreihe gleich der Taylorreihe (die Potenzreihe, die f darstellt).

Wichtigster Spezialfall von 8.14 ist $r = 0$, d.h. isolierte Singularität.
$H(z) := \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k$ heißt der Hauptteil von f an der Stelle a.

Damit erhält man eine Beschreibung wie im Satz von Casorati-Weierstraß:

(i) f hat eine hebbare Singularität in $a \Leftrightarrow H(z) = 0$;

(ii) f hat einen Pol an der Stelle $a \Leftrightarrow H(z)$ ist eine endliche Summe ($\neq 0$);

(iii) f hat eine wesentliche Singularität in $a \Leftrightarrow H(z)$ ist eine unendliche Reihe $\Rightarrow$ $c_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$ (und $H(z) \neq 0$).

Wieder setzt man $\operatorname{res}(f,a) := c_{-1}$.

Beweis: *(von Satz 8.14)*
Sei $z \in B(a,r,R)$. Wähle $r < r' < R' < R$ mit $z \in B(a,r',R')$.
Nach Satz 8.13 ist $f(z) = F(z)+H(z)$ mit $F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a|=R'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw, H(z) := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$
F ist holomorph in $B(a,r,R)$ und lässt sich in einer Potenzreihe entwickeln: $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$, wobei $c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a|=\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,dw$ (unabhängig von $\rho \in (r,R)$ nach Lemma 8.12).
Für $H(z)$ verwende $\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z-a}[1-\underbrace{\frac{w-a}{z-a}}_{|\cdot|<1}]^{-1} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-a}{z-1}\right)^n.$

$$\Rightarrow H(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a|=r'} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}(z-a)^{-n-1}\int\limits_{|w-a|=r'} f(w)(w-a)^n\,dw = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k$$

mit $c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a|=\rho} f(w)(w-a)^{-k-1}\,dw.$ (nach Lemma 8.12)

□

Bemerkung 8.16.
Falls $f \in \mathcal{H}(B(a, r, \infty))$, so sagt man, dass f einen Pol der Ordnung m in ∞ besitzt, falls $g(z) := f(\frac{1}{z})$ einen Pol der Ordnung m bei 0 besitzt.

Analog wesentliche Singularität in ∞.

Beispiele:
$f(z) = z^2 + z + 1$ hat einen Pol zweiter Ordnung in ∞, exp hat eine wesentliche Singularität in ∞.

9. Der Residuensatz

Worum geht's? 9.1.
Falls eine Funktion nur Pole hat (→ meromorphe Funktionen), kann man Integrale (über $\mathbb{R}$) durch „Komplexifizierung" leicht berechnen. Dazu verwendet man den Residuensatz, der das Integral über f darstellt als Summe der Residuen für die Pole, die von meiner Kurve eingeschlossen werden.

Natürlich kommt hier wieder die Windungszahl ins Spiel. Dazu gehören Begriffe wie Kette, Zyklus, Homologie, Homotopie.

a. Homologie und Homotopie

Ab sofort wird auf die formale Unterscheidung von Wegen und Kurven verzichtet. D.h. für einen Weg γ ist $\int\limits_{\gamma} f := \int\limits_{[\gamma]} f$ (Weg = stückweise glatter Weg).

Lemma 9.2.
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(G)$. Definiere $g : G \times G \to \mathbb{C}, g(z,w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & ,z \neq w; \\ f'(z) & ,z = w. \end{cases}$
Dann ist g stetig.

Beweis:
Zu zeigen ist die Stetigkeit an den Stellen (a,a) für $a \in G$. Da f' stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\rho > 0$ mit $B(a,\rho) \subset G$ und $|f'(\xi) - f'(a)| < \varepsilon$ für $\xi \in B(a,\rho)$.

Sei $(z,w) \in B(a,\rho) \times B(a,\rho)$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto z + t(w-z)$.

$\Rightarrow f(w) - f(z) = \int\limits_{\gamma} f'(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^1 f'(\gamma(t))\, dt(w-z)$.

$\Rightarrow g(z,w) - g(a,a) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a) = \int\limits_0^1 \underbrace{[f'(\gamma(t)) - f'(a)]}_{|\cdot|<\varepsilon}\, dt.$

$\Rightarrow |g(z,w) - g(a,a)| \leq \varepsilon$ für $(z,a) \in B(a,\rho) \times B(a,\rho)$.

□

Definition 9.3 (Kette).

(a) Seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ Wege in $\mathbb{C}$, $K := \mathcal{R}(\gamma_1) \cup \ldots \cup \mathcal{R}(\gamma_n)$.
Betrachte die zugehörigen linearen Funktionale $T_j : C(K) \to \mathbb{C}, f \mapsto \int\limits_{\gamma_j} f(z)\, dz$.

Eine **Kette** γ ist eine formale Summe $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, welche die Summe der Funktionale induziert, $T : C(K) \to \mathbb{C}, f \mapsto \sum\limits_{j=1}^{n} T_j f$. D.h. wir setze $\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz := \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma_j} f(z)\, dz$ für $f \in C(K)$.

Eine **Kette in** G ist eine Kette γ mit $\mathcal{R}(\gamma) \subset G$.

Ein **Zyklus** ist eine Kette geschlossener Wege.

Eine Kette kann verschieden dargestellt werden:
es gilt $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = \mu_1 + \ldots + \mu_m \Leftrightarrow \mathcal{R}(\gamma_1) \cup \ldots \cup \mathcal{R}(\gamma_n) = \mathcal{R}(\mu_1) \cup \ldots \cup \mathcal{R}(\mu_m)$ und $\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma_j} f(z)\, dz = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\mu_k} f(z)\, dz$ für $f \in C(K)$.

Schreibe $-\gamma$ für die Kette, bei der jeder Weg in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird.

(b) Die Summe von Ketten wird in offensichtlicher Weise definiert:
$\int\limits_{\gamma+\mu} f(u)\, dz := \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz + \int\limits_{\mu} f(z)\, dz$ für $f \in C(\mathcal{R}(\gamma) \cup \mathcal{R}(\mu))$.

(c) Sei $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ ein Zyklus, $z \neq \mathcal{R}(\gamma)$. Definiere die Windungszahl $\operatorname{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{w-z}\, dw = \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z)$.

Satz 9.4.
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, γ ein Zyklus in G mit $\operatorname{Ind}_\gamma(w) = 0$ für $w \in \mathbb{C} \setminus G$. Sei $f \in \mathcal{H}(G)$.

(a) Cauchyscher Integralsatz: $\int\limits_{\gamma} f(w)\, dw = 0$.

(b) Cauchysche Integralformel: $f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$ für $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$.

Beweis:

(b) Definiere g wie in Lemma 9.2 und setze $h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} g(z,a)\, dw$.

(i) h ist holomorph in G: g stetig nach 9.2. Sei $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck.

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z,1)\,dw\,dz = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\int_{\partial\Delta} g(z,1)\,dz \right) dw \qquad \text{(Fubini)}$$

$z \mapsto g(z,w)$ ist holomorph in $G \setminus \{w\}$ und stetig, also in einer Umgebung von w beschränkt.
Nach dem Hebbarkeitssatz ist $g \in \mathcal{H}(G)$ (fortsetzbar).
$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} g(z,w)\,dz = 0 \Rightarrow \int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = 0$. Satz von Morera $\Rightarrow h \in \mathcal{H}(G)$.

(ii) h kann zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden:
setze $G_0 := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma) : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0\}$, $h_0(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ für $z \in G_0$.
Nach Voraussetzung ist $\mathbb{C} \setminus G \subset G_0$.

Für $z \in G \cap G_0$ ist $h_0(z) - h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw = f(z)\underbrace{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}_{=0} = 0$.

$$\widetilde{h}(z) := \begin{cases} h(z) & , z \in G; \\ h_0(z) & , z \notin G. \end{cases}.$$

$\Rightarrow \widetilde{h} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

(iii) Anwendung des Satzes von Liouville: da G_0 insbesondere die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma)$ enthält, gilt $\widetilde{h}(z) \to 0$ für $|z| \to \infty$.
Nach Liouville folgt $\widetilde{h} = 0$ und damit $h = 0$.

$$\Rightarrow 0 = \tfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tfrac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \tfrac{1}{2\pi i} \int_g \tfrac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z).$$

(a) Wähle $z \in G \setminus \mathcal{R}(\gamma)$ und wende (b) an auf $g : \Gamma \to \mathbb{C}, w \mapsto (w-z)f(w)$.

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \underbrace{\frac{g(w)}{w-z}}_{=f(w)}\,dw = \underbrace{g(z)}_{=0} \int_\gamma(z) = 0.$$

□

Bemerkung 9.5.

(a) Falls $G \subset \mathbb{C}$ konvex ist und γ ein Weg in G ist, so ist $\mathrm{Ind}_g(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Also ist Satz 9.4 anwendbar, und man erhält den Cauchy-Integralsatz für konvexe Gebiete (7.5).

(b) Analog folgt der Cauchy-Integralsatz für Kreisringe (8.13), wenn man Satz 9.4 anwendet auf $G := B(a, r, R)$, $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ mit $\mathcal{R}(\gamma_1) = \{z : |z - a| = R'\}, \mathcal{R}(\gamma_2) = \{z : |z - a| = r'\}$.

(c) Aus Satz 9.4 (a) folgt für zwei Zykel γ_1, γ_2 mit $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus G$: $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\, dz$.

Bemerkung 9.6.
Unter den Voraussetzungen von Satz 9.4 gilt:
$\mathrm{Ind}_g(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$.

Beweis:
Iteratives Ableiten der Formel aus Satz 9.4 (b) nach z (beachte: Ind_γ ist lokal konstant).

□

Definition 9.7 (Homologie und Homotopie)**.**

(a) Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, γ_1, γ_2 zwei Zykel in G. Dann heißen γ_1 und γ_2 **homolog** in G, falls $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.
Ein Zyklus γ in G heißt **nullhomolog**, falls $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus G$.

(b) Sei $\emptyset \neq \Gamma \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to G$ zwei Wege mit $\_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Dann heißen γ_0 und γ_1 **homotop** in G, falls es eine stetige Funktion $H : [0, 1] \times [0, 1] \to G$ gibt mit $H(\cdot, 0) = \gamma_0, H(\cdot, 1) = \gamma_1$ und $H(0, \tau) = \gamma_0(0), H(1, \tau) = \gamma_0(1)$ für $\tau \in [0, 1]$.
γ heißt **nullhomotop** $\Leftrightarrow$ γ ist homotop zum konstanten Weg $\widetilde{\gamma}(t) := c$ für $t \in [0, 1]$ und ein $c \in G$.

Beides definiert Äquivalenzrelationen.

(c) Die Menge der Äquivalenzklassen bzgl Homotopie heißt die **Fundamentalgruppe** von G.
G heißt **einfach zusammenhängend**, falls jeder geschlossene Weg in G nullhomotop ist.

Lemma 9.8.
Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ für $z \in \mathbb{C}$ (γ_0, γ_1 geschlossen).
Falls $|g_1(t) - \gamma_0(t)| < |z - \gamma_0(t)$ für $t \in [0, 1]$, dann gilt $\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z)$.

Beweis:
Nach Voraussetzung gilt $z \notin \mathcal{R}(\gamma_0), z \notin \mathcal{R}(\gamma_1)$. Setze $\gamma(t) := \frac{\gamma_1(t)-z}{\gamma_0(t)-z}$.
$\Rightarrow \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)-z} - \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)-z}$ und $|1-\gamma(t)| = \frac{|\gamma_0(t)-\gamma_1(t)|}{|\gamma_0(t)-z|} < 1$ für $t \in [0,1]$.
Damit $0 \notin \mathcal{R}(\gamma)$, da $\mathbb{R}(\gamma) \subset B(1,1) \Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$

$$0 = 2\pi i \,\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-0}\,dt = \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)-z}\,dt - \int_0^1 \frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)-z}\,dt = 2\pi i(\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z)).$$

□

Bemerkung 9.9.

(a) Sei $G \subset C$ offen, γ_0, γ_1 geschlossene Wege in G. Mit Lemma 9.8 kann man zeigen:
γ_0, γ_1 sind nullhomotop $\Rightarrow \gamma_0, \gamma_1$ nullhomolog.

(b) Der Satz von Cauchy gilt somit für nullhomologe Zykel. Insbesondere gilt der Satz in einfach zusammenhängenden Gebieten für jeden geschlossenen Weg.

b. Der Residuensatz

Definition 9.10.
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. f ist **meromorph** auf G: $\Leftrightarrow f \in \mathcal{M}(G)$: $\Leftrightarrow \ \exists P_f \subset G : f \in \mathcal{H}(G \setminus P_f)$, f hat einen Pol an jeder Stelle $p \in P_f$, P_f hat keinen Häufungspunkt in G.
($\Rightarrow P_f$ höchstens abzählbar)

Satz 9.11 (Residuensatz)**.**

(i) *Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(G)$ mit Polmenge P_f. Sei γ ein nullhomologer Zyklus in $\Gamma \setminus P_f$.*
Dann gilt $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \sum\limits_{p \in P_f} res(f,p)\,\mathrm{Ind}_\gamma(p)$.

(ii) *Insbesondere gilt für einen geschlossenen Integrationsweg in $G \setminus P_f$:* $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$ *ist die Summe aller Residuen der vom Weg eingeschlossenen Pole.*

Beispiel 9.12.
Es gilt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,ds = \pi$.
Setze $f(z) := \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) \Rightarrow f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), P_f = \{i,-i\}, \mathrm{res}(f,i) = \frac{1}{2i}$.
Integrationsweg: $\partial H_R, H_R := \{z \in \mathbb{C} : Im\, z > 0, |z| < R\}$.
$\int\limits_{\partial H_R} f(z)\,dz = 2\pi i\mathrm{res}(f,i) = \pi$.

Abschätzung des Integrals über dem Halbkreis:
Parametrisierung $z = \gamma(\varphi) = Re^{i\varphi}, \varphi \in [0,\pi]$.
$\Rightarrow |\gamma'(\varphi)| \leq |R|, |1+z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$.
$\Rightarrow \left|\int\limits_{|z|=R, Im\, z>0} f(z)\,dz\right| \leq \int\limits_0^\pi \frac{R}{R^2-1}\,d\varphi = \frac{R\pi}{R^2-1} \to 0$ für $R \to \infty$.
$\int\limits_{-R}^{R} f(z)\,dz \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

Damit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\partial H_R} f(z)\,dz = \pi$.

Beispiel 9.13.
Es gilt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi \left(= \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx \right)$.

Setze $f(z) := \frac{e^{iz}}{z} \Rightarrow f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}), P_f = \{0\}$.
$\gamma_1 : [0,R] \to \mathbb{C}, t \mapsto R + it$

$\gamma_2 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto -t + iR$
$\gamma_3 : [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto -R + i(1-t)$

f ist im eingeschlossenen Bereich holomorph $\Rightarrow \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0, \gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_4.$

(i) γ_1: Integrand $\leq \frac{e^{-t}}{R}$ $\left(|f(\gamma_1(t))| \leq \frac{e^{-t}}{R} \text{ für } t \in [0,R]\right)$
$\Rightarrow \left|\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz\right| \leq \int\limits_0^R \frac{e^{-t}}{R}\,dt \leq \frac{1}{R} \to 0$ für $R \to \infty$.
Genauso $\left|\int\limits_{\gamma_3} f(z)\,dz\right| \to 0$ für $R \to \infty$.

(ii) γ_2: Integrand $\leq \frac{e^{-R}}{R} \Rightarrow \left|\int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{-R}}{R}\,dt = 2e^{-R} \to 0$ für $R \to \infty$. ($|e^{iz}| = e^{Im\,z}$)

(iii) Integral über den kleinen Halbkreis (um Polstelle bei 0) in negativer Richtung:
$-\int\limits_0^{\pi} f(\varepsilon e^{i\varphi}) \cdot i\varepsilon e^{i\varphi}\,d\varphi = -i\int\limits_0^{\pi} \exp(\varepsilon e^{i\varphi})\,d\varphi \to -i\pi$ für $\varepsilon \to 0$.
Integrale auf der reellen Achse: $\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx = 2i\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx =$
$i \int\limits_{[-R,\varepsilon]\cup[\varepsilon,R]} \frac{\sin x}{x}\,dx \to i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ für $R \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$.

(iv) Insgesamt: $i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx - i\pi = 0$, d.h. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$.

Beweis: *(von Satz 9.11)*

(a) (i) Wir zeigen, dass $P_f^0 := \{p \in ¶_f : \mathrm{Ind}_\gamma(p) \neq 0\}$ endlich ist:
Angenommen, es existieren unendlich viele $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P_f$ mit $\mathrm{Ind}_\gamma(p_n) \neq 0$. Da $\mathrm{Ind}_\gamma = 0$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma)$, muss $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt sein. Damit hat $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $p \in \partial G$. Wegen $\mathcal{R}(\gamma) \subset G$ folgt $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = 0$. Da Zusammenhangskomponenten offen sind und Ind_γ lokal konstant ist, folgt $p_n = 0$ für unendlich viele n, Widerspruch.

Sei $P_f^0 = \{p_1, \ldots, p_m\}$.

(ii) Seien $h_1, \dots, h_m$ die Hauptteile von f an den Stellen $p_1, \dots, p_n$. Dann ist $g := f - h_1 - \dots - h_m$ holomorph (fortsetzbar) in G.
$\Rightarrow 0 = \int\limits_\gamma g(z)\,dz = \int\limits_\gamma f(z)\,dz - \sum\limits_{j=1}^m \int\limits_\gamma h_j(z)\,dz.$

Sei $h_j(z) = \sum\limits_{l=-M_j}^{-1} c_j^{(l)}(z-p_j)^l$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma h_j(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \sum_{l=-M_j}^{-1} c_j^{(k)}(z-p_j)^l\,dz = \underbrace{c_j^{(-1)}}_{=\mathrm{res}(f,p_j)} \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{z-p_j}\,dz}_{=\mathrm{Ind}_\gamma(p_j)}.$$

(b) folgt sofort aus (a), da $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = 1$, falls p vom Integrationsweg eingeschlossen wird, und $\mathrm{Ind}_\gamma(p) = 0$, falls p außerhalb liegt.

□

Bemerkung 9.14.
Sei G ein Gebiet, a eine Polstelle von f.
$\mathrm{res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a|=r} f(w)\,dw$ für r klein.
Sei $f = \frac{g}{h}, h(z) = (z-a)^m\varphi(z), \varphi \in \mathcal{H}(G), \varphi(a) \neq 0$.

$$\Rightarrow \mathrm{res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w-a|=r} \frac{g(w)}{\varphi(w)} \cdot \frac{1}{(w-a)^m}\,dw = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{g}{\varphi}\right)^{(m-1)}(a) \qquad \text{(nach Lemma 9.6)}$$

Wie kann ich ein Residuum berechnen?

- direkt aus der Laurentreihe ablesen (Koeffizient bei $(z-a)^{-1}$);
- $f = \frac{g}{h}$, h hat m-fache Nullstelle, φ wie oben:
$$\mathrm{res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{g}{h}\right)^{(m-1)}(a);$$
- $f = \frac{g}{h}$, h hat eine einfache Nullstelle:
$$\textbf{??} f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z);$$
- a ein einfacher Pol von f, $g \in \mathcal{H}(G) \Rightarrow \mathrm{res}(f\cdot g,a) = g(a)\cdot\mathrm{res}(f,a)$;
- Residuum ist linear, z.B. a Polstelle von f und $g \in \mathcal{H}(G) \Rightarrow \mathrm{res}(\alpha f + g,a) = \alpha\mathrm{res}(f,a)$.

Satz 9.15.
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{M}(G)$, γ ein geschlossener Weg in $G \setminus P_f$ mit $f(z) \neq 0$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma)$, $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \{0,1\}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma)$.
Sei N bzw. P die Anzahl der von γ eingeschlossenen Nullstellen bzw. Polstellen von f (inklusive Vielfachheit).
Dann ist $\boxed{N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.}$

Beweis:
Sei p eine Nullstelle der Ordnung m, d.h. $f(z) = (z-p)^m g(z)$ mit $g(z) \neq 0$ in einer Umgebung von p.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-p)^{m-1}g(z) + (z-p)^m g'(z)}{(z-p)^m g(z)} = \frac{m}{z-p} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

$\frac{g'}{g}$ ist nahe p holomorph $\Rightarrow \operatorname{res}(\frac{f'}{f}, p) = m$.
Analog folgt bei einem Pol der Ordnung m: $\operatorname{res}(\frac{f'}{f}, p) = -m$.

Behauptung folgt jetzt aus dem Residuensatz.

□

Korollar 9.16 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Ein Polynom P vom Grad n über $\mathbb{C}$ besitzt genau n Nullstellen.

Beweisskizze:
Wähle $R > 0$ mit $|P(z)| \geq 1$ für $|z| \geq R$.
$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$,
$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{n a_n z^{n-1} + \ldots + a_1}{a_n z^n + \ldots + a_0} = \frac{n}{z} + \sum_{j=2}^{\infty} c_j z^{-j} \qquad \text{(Laurentreihe um 0)}$$

Nach Satz 9.15 ist $N = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz = \operatorname{res}(\frac{P'}{P}, 0) = n$.

□

Satz 9.17.
Sei $G \subset \mathbb{C}$, γ ein nullhomologer Weg in G, $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \{0,1\}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{R}(\gamma)$. Zu $f \in \mathcal{H}(G)$ sei N_f die Anzahl der von γ eingeschlossenen Nullstellen von f.

(a) *Falls $f(z) \neq 0$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma)$, so ist $N_f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \operatorname{Ind}_{f \circ \gamma}(0)$.*

(b) (Satz von Rouché). *Falls* $f, g \in sH(G)$ *mit*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \text{ für } z \in \mathcal{R}(\gamma),$$

so ist $N_f = N_g$.

Beweis:

(a) $\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_f$ (nach 9.15)

(b) Nach Voraussetzung gilt $f(z) \neq 0$, $g(z) \neq 0$ für $z \in \mathcal{R}(\gamma)$.
Nach (a) gilt $N_f = \operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0), N_g = \operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$.
Wende nun Lemma 9.8 auf $\gamma_0 := f \circ \gamma, \gamma_1 := g \circ \gamma, z = 0$ an.

$\square$

10. Der Wertebereich holomorpher Funktionen

Worum geht's? 10.1.
Wir wissen schon etwas über Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen (z.B. Casorati-Weierstraß).

Hier kommt einiges in dieser Richtung dazu: $f(G)$ ist ein Gebiet (für G ein Gebiet), Maximumprinzip (kein Betragsmaximum im Gebiet), Winkeltreue (konforme Abbildungen).

Satz 10.2.
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(G)$, $z_0 \in G$, $f'(z_0) \neq 0$.
Dann existiert eine offene Umgebung $V \subset G$ von z_0, so dass $f|_V$ biholomorph ist, d.h. $f|_V$ ist bijektiv, $f(V)$ ist offen, $(f|_V)^{-1}$ ist holomorph.

Es ist $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f(w))}$ für $w \in f(V)$.

Beweis:
Siehe Analysis II (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit).

□

Definition 10.3 (offene Abbildung)**.**
Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **offen**, falls $f(U) \subset Y$ offen für jedes $U \subset X$ offen.

Beispiel 10.4.
Für $m \in \mathbb{N}$ betrachte die Potenzfunktion $\pi_m : z \mapsto z^m$. Dann ist $\pi_m : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ offen: Falls $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ offen ist, so ist $\pi_m(U)$ offen nach Satz 10.2.

Zu zeigen ist, dass $\pi_m(0) = 0$ ein innerer Punkt von $\pi_m(U)$ ist, falls $0 \in U$, U offen. Das ist klar, wegen $\pi_m(B(0,r)) = B(0,r^m)$.

Beachte: $z^m = w$ hat m Lösungen $z_j := \sqrt[m]{r} \cdot \exp(i\frac{2\pi j+\theta}{m})$ für $w = re^{i\theta}$.

Satz 10.5.
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G)$ nicht konstant, $z_0 \in G$ und $w_0 := f(z_0)$. Es sei m die Nullstellenordnung von $z \mapsto f(z) - w_0$.
Dann existiert eine offene Umgebung U von z_0 und ein $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ mit $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$

in U.
Weiter gilt $\varphi'(z) \neq 0$ für $z \in U$ und $\varphi(U) = B(0, r)$ für ein geeignetes $r > 0$.

Somit gilt $f(z) = w_0 + \varphi(z)^m$.

Beweis:
Sei $\widetilde{U} \subset G$ eine konvexe Umgebung von z_0, so dass $f(z) \neq w_0$ für $z \neq z_0$ *(die Existenz von $\widetilde{U}$ folgt, da die Nullstellen von $f - w_0$ keine Häufungspunkte in G haben).*
$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m \cdot g(z)$ mit $g \in \mathcal{H}(\widetilde{U})$ und $g(z) \neq 0$ für $z \in \widetilde{U}$.
$\Rightarrow \frac{g'}{g}$ ist holomorph in $\widetilde{U}$. Damit hat $\frac{g'}{g}$ eine Stammfunktion h.

$(g \cdot \exp(-h))' = g' \exp(-h) - gh' \exp(-h) = g\left(\frac{g'}{g} - h'\right)\exp(-h) = 0$
$\Rightarrow g \exp(-h) = c \Rightarrow g = c \exp(h)$, ObdA $c = 1$ (wähle Konstante in Stammfunktion h entsprechend).
Wir setzen $\varphi(z) := (z - z_0) \exp\left(\frac{h(z)}{m}\right)$.

$\pi_m \circ \varphi = (z - z_0)^m \exp(h) = (z - z_0)^m g = f(z) - w_0$.
$\varphi'(z_0) \neq 0$. Damit existiert nach 10.2 eine Umgebung V mit $\varphi\mid_V$ biholomorph (und $\varphi'(z) \neq 0$ für $z \in V$), d.h. $B(0, r) \subset \varphi(V)$ für ein geeignetes r. Setze $U := \varphi^{-1}(B(0, r))$.
□

Satz 10.6 (Satz von der offenen Abbildung, Satz von der Gebietstreue)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$, nicht konstant. Dann ist f offen und $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis:
Zu zeigen ist nur die Offenheit von f ($f(G)$ ein Gebiet folgt dann aus Offenheit und Stetigkeit von f).

Sei $w_0 \in f(G)$. Dann gilt (nach 10.5) $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$. Da $\varphi'(z) \neq 0$ für $z \in U$ (nach Satz 10.5), damit ist φ nach 10.2 offen. $\Rightarrow f - w_0$ ist offen, $\Rightarrow f$ ist offen.
□

Korollar 10.7.
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$ injektiv, dann gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ und $f : G \to f(G)$ ist biholomorph.

Beweis:
Angenommen, $f'(z_0) = 0$ für ein $z_0 \in G$. Dann hat die Funktion $f - w_0$ ($w_0 := f(z_0)$) eine m-fache Nullstelle in z_0 mit $m \geq 2$.

Wende Satz 10.5 an und erhalte $f - w_0 = \pi_m \circ \varphi$.
Widerspruch, weil π_m nicht injektiv ist *(denn φ bildet auf eine Kugel ab und π_m ist in jeder Umgebung nicht injektiv).*

□

Satz 10.8 (Maximumprinzip)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$.

(a) Falls $|f|$ an der Stelle z_0 ein lokales Maximum hat, so ist f konstant.

(b) Falls G beschränkt und f stetig in $\overline{G}$ ist, so gilt

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \textit{ für } z \in \overline{G}$$

Beweis:

(a) Es sei f nicht konstant und z_0 ein lokales Maximum, d.h. es existiert eine Umgebung U von z_0, so dass $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für $z \in U$.
$f(U) \subset \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq |f(z_0)|\}$. Damit ist $f(U)$ nicht offen → Widerspruch.

(b) $|f|$ nimmt Maximum an.

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Fall 1:}\text{ Maximum in } z_0 \in G \;\Rightarrow\; \text{(nach (a)) } f \text{ ist konstant.}\\ \textit{Fall 2:}\text{ Maximum in } z_0 \in \partial G.\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

□

Satz 10.9 (Minimumprinzip)**.**
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{H}(G)$.

(a) Falls $|f|$ an der Stelle $z_0 \in G$ ein lokales Minimum hat, dann gilt: $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant.

(b) Falls G beschränkt und f stetig auf $\overline{G}$ ist, so gilt:
Entweder hat f Nullstellen in G oder $|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)|$ für $z \in \overline{G}$.

Beweis:
Wende Satz 10.8 auf $\frac{1}{f}$ an.

□

Definition 10.10 (Schnittwinkel, winkeltreu, konform)**.**

(a) Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [-a, a] \to \mathbb{C}$ zwei glatte Wege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: z_0$. Dann heißt

$$\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0} := \arg\left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}\right)$$

der **(orientierte) Schnittwinkel** von γ_1 und γ_2 in z_0.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt **winkeltreu und orientierungserhaltend**, falls für alle glatten Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [-a, a] \to G$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) =: z_0$ gilt:

$$\sphericalangle(f(\gamma_1), f(\gamma_2))_{f(z_0)} = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0}.$$

(c) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt **konform**, falls f injektiv, winkeltreu und orientierungserhaltend ist. Falls f nur lokal injektiv ist, so spricht man von **lokal konform**.

Bemerkungen 10.11.

1. $\sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)$ ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt.
2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$; dann ist f winkeltreu und orientierungserhaltend.
   $\sphericalangle(f(\gamma_1), f(\gamma_2))_{f(z_0)} = \arg\left(\frac{(f\circ\gamma_2)'(0)}{(f\circ\gamma_1)(0)}\right) = \arg\left(\frac{f'(\gamma_2(0))\gamma_2'(0)}{f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0)}\right) = \arg\left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}\right) = \sphericalangle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0}.$

Beispiele 10.12.

(a) exp-Funktion ist lokal konform.

(b) $\pi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ ist lokal konform in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Für $k = 0, \ldots, n-1$ betrachte den Sektor $S_k := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{2\pi}{n}k < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1)\}$.
$\pi_n : S_k \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist konform.

Satz 10.13 (Schwarzsches Lemma)**.**
Sei $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorph mit $f(0) = 0$.

(a) Es gilt $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in B(0,1)$ und $|f'(0)| \leq 1$.

(b) Es gelte $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \dot{B}(0,1)$ ($= B(0,1) \setminus \{0\}$). Dann existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $f(z) = e^{i\varphi}z$ für $z \in B(0,1)$.

Beweis:

(a) Betrachte $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & ,z \neq 0, \\ f'(0) & ,z = 0. \end{cases}$ $\Rightarrow$ In $\dot{B}$ ist g holomorph. Aus dem Hebbarkeitssatz folgt $g \in \mathcal{H}(B(0,1))$.
Nach dem Maximumprinzip folgt für $|z| \leq r < 1$

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} \tfrac{|f(w)|}{|w|} = \tfrac{1}{r}.$$

Für $r \to 1$ folgt $|g(z)| \leq 1$ für $z \in B(0,1)$.

(b) Falls $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für $z_0 \neq 0$, so nimmt g sein Maximum in $B(0,1)$ an. Damit ist g konstant nach dem Maximumprinzip mit $|g(z)| = 1 \Rightarrow g(z) = e^i\varphi$ mit $\varphi \in [0, 2\pi] \Rightarrow$ Behauptung.

$\square$

11. Folgen holomorpher Funktionen und der Riemannsche Abbildungssatz

Worum geht's? 11.1.
Wie immer muss man auch bei holomorphen Funktionen Folgen und entsprechende Konvergenzbegriffe betrachten. Am wichtigsten hier: lokal gleichmäßige Konvergenz.
Der Satz von Weierstraß besagt, dass der Limes holomorph ist und auch alle Ableitungen konvergieren.
Nach dem Satz von Hurwitz gehen beim Limes keine Nullstellen verloren bzw. kommen keine dazu (vgl. $f_n(x) := x^2 + \frac{1}{n}$ im Reellen).
Der Satz von Montel liefert ein Kriterium für lokal gleichmäßige Konvergenz.

Der Riemannsche Abbildungssatz sagt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet biholomorph zur Kreisscheibe $B(0,1)$ ist. Dies ist einer der stärksten Sätze der Funktionentheorie und ein Beispiel in Richtung Klassifizierung von Gebieten.

a. Folgen holomorpher Funktionen

Bemerkung 11.2.
Sei $\emptyset \neq G \subset G$ offen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, $f_n : G \to \mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$.

(a) Sei $M \subset G$. $f_n \to f$ gleichmäßig auf $M :\Leftrightarrow \sup_{z\in M} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ für $n \to \infty$.
$f_n \to f$ lokal gleichmäßig $:\Leftrightarrow\ \forall\ z \in G\ \exists$ Umgebung $U \subset G$: $f_n \to f$ gleichmäßig in U.

(b) $f_n \to f$ gleichmäßig auf Kompakta $:\Leftrightarrow f_n \to f$ gleichmäßig auf jeder kompakten Menge $K \subset G$.
(dies ist offensichtlich(!) äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz)

Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Funktionen, $f : G \to \mathbb{C}$ und $M \subset G$.

(c) $\mathcal{F}$ heißt beschränkt in M, falls $\sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{F}, z \in M\} < \infty$.
$\mathcal{F}$ heißt lokal beschränkt in $G :\Leftrightarrow\ \forall\ z \in G\ \exists$ eine Umgebung von z, in der $\mathcal{F}$ beschränkt ist.

(d) $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in $M :\Leftrightarrow\ \forall\ z \in M\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ z' \in M, |z - z'| < \delta\ \forall\ f \in \mathcal{F} : |f(z) - f(z')| < \varepsilon$.
$\mathcal{F}$ lokal gleichgradig stetig in $G :\Leftrightarrow\ \forall\ z \in G\ \exists$ eine Umgebung U von z, so dass $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in U ist.

(e) $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig in $M :\Leftrightarrow \;\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, z, z' \in M, |z - z'| < \delta,\; \forall\, f \in \mathcal{F} : |f(z) - f(z')| < \varepsilon$.
$\mathcal{F}$ lokal gleichmäßig gleichgradig stetig: analog.

(f) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen ∞, falls für alle kompakten Mengen $K \subset G$ und für alle $R > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f_n(z)| \geq R$ für $z \in K, n \geq n_0$.

Satz 11.3 (von Weierstraß)**.**
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$ lokal gleichmäßig konvergent gegen f.
Dann ist $f \in \mathcal{H}(G)$ und jede Folge $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ der Ableitungen konvergiert lokal gleichmäßig gegen $f^{(j)}$ für $j \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Achtung fehlerhaft - Korrektur im Skript von Herrn Denk
Nach Sätzen über gleichmäßige Konvergenz ist f stetig.
Sei $\Delta \subset G$ ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0$ (Vertauschen von Integral und gleichmäßigem Limes und Lemma von Goursat).
Nach dem Satz von Morera ist $f \in \mathcal{H}(G)$.

Sei $\overline{B(a,r)} \subset G$. Nach der Abschätzung für die Koeffizienten der Potenzreihe (Satz 7.6) gilt $|f_n^{(j)}(z) - f^{(j)}(z)| \leq j! \cdot r^{-j} \underbrace{\max_{|z-a|=r} |f_n(z) - f(z)|}_{\to 0,\text{ da } f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } \{|z-a|=r\}}$ für $z \in B(a,r)$.
Damit folgt die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen.

□

Satz 11.4 (von Hurwitz)**.**
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$ mit $f_n \to f$ lokal gleichmäßig in G, sei $a \in G$. Falls $f \not\equiv 0$, sind äquivalent:

(i) f hat an der Stelle a eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 0$.

(ii) Es existiert eine offene Umgebung $U \subset G$ von a, so dass für alle $\overline{B(a,r)} \subset U$ ein $n_0 = n_0(r)$ existiert mit: für $n \geq n_0$ hat f_n in $B(a,r)$ genau m Nullstellen (inklusive Vielfachheit).

Beweis:
Wegen $f \not\equiv 0$ existiert eine Umgebung U von a mit: a ist die einzige Nullstelle von

f in U.
Sei $\overline{B(a,r)} \subset U$. Setze $\varepsilon(r) := \min_{|z-a|=r} |f(z)|$. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf Kompakta konvergiert, existiert ein $n_0(r)$ mit $|f_n(z)-f(z)| < \varepsilon(r) \le |f(z)|$ für $|z-a| = r, n \ge n_0(r)$. Nach dem Satz von Rouché haben f und f_n die gleiche Anzahl von Nullstellen (inklusive Vielfachheit) in $B(a,r)$.

□

Korollar 11.5.
In der Situation von Satz 11.4 gilt:

(a) *Ist jede f_n nullstellenfrei in G, so auch f.*

(b) *Ist jedes f_n injektiv, so auch f.*

Beweis:

(a) Satz von Hurwitz mit $m = 0$.

(b) Sei $a \in G$ betrachte $g_n(z) := f_n(z) - f_n(a)$ in $G \setminus \{a\}$ und wende (a) an.

□

Definition 11.6.
Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ heißt **normal**, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine Teilfolge besitzt, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{H}(G)$ oder gegen ∞ konvergiert.

Satz 11.7 (von Montel)**.**
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ eine lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen.
Dann ist $\mathcal{F}$ normal.

Ist insbesondere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(G)$ lokal beschränkt, so besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis:
Wie in Lemma 8.4 schreibe G als Vereinigung kompakter Mengen: $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.
Nach Konstruktion der A_k gilt $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, r = r(k) > 0\ \forall\, z \in A_k : B(z, 2r) \subset A_{k+1}$.

(i) Sei $K \subset G$ kompakt. Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig in K ist. Wegen $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset A_k$. $\mathcal{F}$ lokal beschränkt $\Rightarrow$ $\exists\, C > 0$ mit $|f(z)| \leq C$ für $f \in \mathcal{F}, z \in A_{k+1}$.

Wähle $r = r(k)$ wie oben. Für $f \in \mathcal{F}, z, z' \in K$ gilt $\overline{B(w,r)} \subset \alpha_{k+1}$ für $w \in s_{zz'}$ (dabei sei $s_{zz'}$ die Strecke von z nach z').

$$|f(z)-f(z')| = \left|\int_{s_{zz'}} f'(w)\,dw\right| \leq |z-z'|\cdot\max_{w\in s_{zz'}}|f'(w)| = |z-z'|\cdot\max_{w\in s_{zz'}}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-w|=r}\frac{f(\zeta)}{(zeta-w)^2}\,d\zeta\right| \leq$$
$$|z-z'|\cdot\frac{2\pi r}{2\pi}\underbrace{\max_{w\in A_{k+1}}|f(w)|}_{\leq C}\cdot\frac{1}{r^2} \leq \frac{C}{r}\cdot|z-z'|.$$

Somit ist f Lipschitz-stetig ($\Rightarrow$ gleichmäßig stetig) mit der Lipschitz-Konstanten $\frac{C}{r}$, welche nicht von f abhängt. Somit ist $\mathcal{F}$ gleichmäßig gleichgradig stetig.

(ii) Sei $K \subset G$ kompakt, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt auf K und nach (i) gleichgradig stetig auf K.
Nach dem Satz von Arzelá-Ascoli besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf K gleichmäßig konvergente Teilfolge.

(iii) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$. Dann besitzt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach (ii) eine auf A_1 konvergente Teilfolge $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$. Davon existiert nach (ii) eine (auch) auf A_2 konvergente Teilfolge $(f_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ usw.
Die Diagonalfolge $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist auf allen A_k, $k \in \mathbb{N}$ konvergent.
Sei $K \subset G$ kompakt. Da $K \subset A_k$ für ein A_k, konvergiert $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K. Somit ist $(f_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist lokal gleichmäßig konvergent.

□

b. Der Riemannsche Abbildungssatz

Definition und Satz 11.8.
Für $a \in B(0,1)$ definiere die Möbius-Transformation

$$\mu_a : \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{1}{\bar{a}}\} \to \mathbb{C} \textit{ durch}$$
$$\mu_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

(a) $\mu_a \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\})$ *mit* $\mu_a(a) = 0$.

(b) $\mu_a^{-1} = \mu_{-a}$.

(c) $\mu_a'(z) = \frac{(1-\bar{a}z)+\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2}$.
Insbesondere ist $\mu_a'(0) = 1 - |a|^2, \mu_a'(a) = (1-|a|^2)^{-1}$.

(d) $\mu_a(B(0,1)) = B(0,1)$ *und* $|\mu_a(z)| = 1$ *für* $|z| = 1$.

Beweis:
(a) - (c): nachrechnen.

(d) Sei $|z| = 1$, d.h. $z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$.
$$|\mu_a(z)| = \left|\frac{e^{i\varphi}-a}{1-\bar{a}e^{i\varphi}}\right| = \underbrace{|e^{-i\varphi}|}_{=1} \cdot \underbrace{\left|\frac{e^{i\varphi}-a}{e^{-i\varphi}-\bar{a}}\right|}_{=1} = 1.$$
Damit $\mu_a(\partial B(0,1)) \subset \partial B(0,1)$.
Nach (b) ist $\mu_a^{-1} = \mu_{-a}$ und damit $\mu_a^{-1}(\partial B(0,1)) \subset \partial B(0,1)$, d.h. $\mu_a : \partial B(0,1) \to \partial B(0,1)$ ist bijektiv.

Nach dem Maximumprinzip ist $\mu_a(B(0,1)) \subset B(0,1)$.
Genauso wie vorher: $\mu_a(B(0,1)) = B(0,1)$.

□

Lemma 11.9.
Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $f(z) \neq 0$ für $z \in G$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{H}(G)$ mit $g^2 = f$ in G.

Beweis:
Wegen $f(z) \neq 0$ für $z \in G$ ist $\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(G)$.
Nach dem Cauchy-Integralsatz (vgl. Bemerkung 9.9 (b)) ist $\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg in G.
Nach Satz 6.29 besitzt $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion F in G. Dann ist $(f(\exp(-F)))' = f'\exp(-F) - f\exp(-F)\frac{f'}{f} = 0$.
Also existiert ein $c \neq 0$ mit $f = c \cdot \exp(F)$.

Setze $g := c^{\frac{1}{2}} \cdot \exp(\frac{F}{2})$, wobei $c^{\frac{1}{2}}$ eine der beiden Wurzeln von c ist.

□

Satz 11.10 (Riemannscher Abbildungssatz)**.**
Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $\emptyset \neq G \subsetneq \mathbb{C}$ ist biholomorph auf $B(0,1)$ abbildbar.

Bemerkung:

- Einfach zusammenhängende Gebiete können sehr kompliziert sein, vgl. Buch von Jänich.
- Für $G = \mathbb{C}$ kann der Satz nicht gelten, da sonst die Abbildung von G nach $B(0,1)$ eine ganze beschränkte Funktion und damit konstant nach Liouville (7.8) wäre.

Beweis:
Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte:

(i) Es existiert ein biholomorphes $f \in \mathcal{H}(G)$ mit $0 \in f(G) \subset B(0,1)$.

(ii) Setze $\mathcal{F} := \{h : f(G) \to B(0,1) | h \text{ ist biholomorph}, h(0) = 0\}$.
Dann existiert ein $g \in \mathcal{F}$ mit $|g'(0)| = \sup\limits_{h \in \mathcal{F}} |h'(0)|$.

(iii) Die Funktion $g : f(G) \to B(0,1)$ ist surjektiv.

Wenn wir (i) - (iii) gezeigt haben, ist $g \circ f : G \to B(0,1)$ die gesuchte biholomorphe Abbildung.

zu (i) Sei $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist $z \mapsto z - a$ eine holomorphe Funktion auf G ohne Nullstelle. Nach Lemma 11.9 existiert eine Wurzel $q \in \mathcal{H}(G)$ mit $q^2(z) = z - a$ für $z \in G$.
Wegen $a \notin G$ ist $q(z) \neq 0$ für $z \in G$.
Es gilt $q(w) \neq \pm q(z)$ für $w, z \in G$ mit $z \neq w$ (1)
(denn sonst wäre $w - a = q^2(w) = q^2(z) = z - a$, d.h. $w = z$)

Wähle $c \in q(G)$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung 10.6 ist $q(G)$ offen, d.h. es existiert ein $r > 0$ mit $B(c,r) \subset q(G)$.
Es gilt $|q(z) + c| \geq r$ für $z \in G$ (2)
(denn sonst existiert ein $z \in G$ mit $q(z) \in B(-c,r)$, d.h. $-q(z) \in B(c,r) \subset q(G)$; somit existiert ein $w \in G$ mit $-q(z) = q(w)$, Widerspruch zu (1))

Nach (2) gilt $q(G) \subset \mathbb{C} \setminus B(-c,r)$. Da $q(G)$ offen ist, gilt sogar $q(G) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B(-c,r)}$, d.h. in (2) kann „$\geq$" durch „$>$" ersetzt werden.

Definiere $\tilde{f}$ durch $\tilde{f}(z) := \frac{r}{q(z)+c}$ für $z \in G$.
Da $|q(z) + c| > r$, folgt $|\tilde{f}(z)| < 1$ für $z \in G$, d.h. $\tilde{f}(G) \subset B(0,1)$. Da q injektiv ist

(vgl. (1)), ist auch $\widetilde{f}$ injektiv.

Sei $z_0 \in G$ beliebig. Definiere $f(z) := \frac{1}{2}(\widetilde{f}(z) - \widetilde{f}(z_0))$.
Dann ist $f \in \mathcal{H}(G)$ injektiv mit $f(G) \subset B(0,1)$ und $f(z_0) = 0$, d.h. $0 \in f(G)$.
Nach Korollar 10.7 ist $f : G \to f(G)$ biholomorph.

zu (ii) Sei $\mathcal{F} := \{h : f(G) \to B(0,1) | h$ ist biholomorph auf $h(f(G))$ und $h(0) = 0\}$.
Wegen $id_{f(G)} \in \mathcal{F}$ ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Setze $\alpha := \sup\limits_{h\in\mathcal{F}} |h'(0)| \in [0, \infty]$.
Wegen $id_{f(G)} \in \mathcal{F}$ ist $\alpha \geq 1$.
Für $r > 0$ mit $B(0,r) \subset f(G)$ und $h \in \mathcal{H}(f(G))$ gilt nach der Cauchy-Integralformel:

$$h'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{h(z)}{z^2}\, dz$$

Für $h \in \mathcal{F}$ folgt $|h'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r} < \infty$.
Daher gilt $\alpha = \sup\limits_{h\in\mathcal{F}} |h'(0)| \leq \frac{1}{r} < \infty$.
Also existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ mit $|g_n'(0)| \to \alpha$ für $n \to \infty$.
Wegen $|g_n(z)| < 1$ für $z \in f(G)$ ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt.
Nach dem Satz von Montel 11.7 existiert eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge, die wieder mit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet sei.
Setze $g := \lim\limits_{n\to\infty} g_n \in \mathcal{H}(f(G))$.

Da $|g_n(z)| < 1$ für $z \in f(G)$, folgt $|g(z)| \leq 1$ für $z \in f(G)$. Nach dem Maximumprinzip (Satz 10.8) gilt $|g(z)| < 1$ für $z \in f(G)$. Nach dem Satz von Weierstraß (Satz 11.3) gilt auch $g_n' \to g'$ lokal gleichmäßig und damit $|g'(0)| = \lim\limits_{n\to\infty} |g_n'(0)| = \alpha \geq 1$.
Es ist ebenso $g(0) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(0) = 0$.

Da alle g_n injektiv sind und g nicht konstant ist (wegen $g'(0) \neq 0$), ist g injektiv nach Korollar 11.5. Nach Korollar 10.7 ist $g : f(G) \to g(f(G))$ biholomorph.
Insgesamt folgt also $g \in \mathcal{F}$.

zu (iii) Angenommen, $g : f(G) \to B(0,1)$ ist nicht surjektiv. Wähle $a \in B(0,1) \setminus g(f(G))$.
Sei μ_a die Möbius-Transformation zu a (siehe Definition 11.8). Dann ist $\mu_a \circ g \in \mathcal{H}(f(G))$ und injektiv (da g und μ_a beide injektiv sind). Wegen $\mu_a(a) = 0$ und $a \notin g(f(G))$ folgt $(\mu_a \circ g)(z) \neq 0$ für $z \in f(G)$.
Nach Lemma 11.9 existiert eine Wurzel $h_1 \in \mathcal{H}(f(G))$ von $\mu_a \circ g$ mit $h_12 = \mu_a \circ g$. h_1 ist injektiv, da für $h_1(z_1) = h_1(z_2)$ folgt $\mu_a \circ g(z_1) = h_1^2(z_1) = h_1^2(z_2) =$

$\mu_a \circ g(z_2)$ und damit $z_1 = z_2$.
Definiere $h : f(G) \to B(0,1)$ durch $h := \mu_{h_1(0)} \circ h_1$. Dann ist $h \in \mathcal{H}(f(G))$ injektiv (damit biholomorph) mit $h(0) = \mu_{h_1(0)}(h_1(0)) = 0$ (siehe Satz 11.8). Somit ist $h \in \mathcal{F}$.

Wir werden zeigen, dass $|h'(0)| > |g'(0)|$ gilt, was ein Widerspruch zur Konstruktion von g in (ii) ist.
Setze $w(z) := \mu_{-a}(\mu_{-h_1(0)}(z)^2)$. Für $w \circ h$ gilt $(w \circ h)(z) = \mu_{-a}(\mu_{-h_1(0)}(\mu_{h_1(0)}(h_1(z)))^2) = \mu_{-a}(h_1(z)^2) = \mu_{-a}(\mu_a(g(z))) = g(z)$.
Damit gilt $g'(0) = (w \circ h)'(0) = w'(\underbrace{h(0)}_{=0}) \cdot h'(0) = w'(0) \cdot h'(0)$.

Wegen $w \in \mathcal{H}(B(0,1))$ mit $w(B(0,1)) \subset B(0,1)$, $w(0) = 0$ und w nicht bijektiv[1], folgt nach dem Schwarzschen Lemma 10.13: $|w'(0)| < 1$.
Damit gilt also $|g'(0)| = |\underbrace{w'(0)}_{<1}| \cdot |h'(0)| < |h'(0)|$, Widerspruch zu (ii).

$\square$

[1] w ist nicht injektiv: nach Satz 11.8 ist $\mu_{-h_1}(0) : B(0,1) \to B(0,1)$ eine Bijektion; insbesondere existieren $z_1, z_2 \in B(0,1)$ mit $\mu_{-h_1(0)}(z_1) = \frac{1}{2}$, $\mu_{-h_1(0)}(z_2) = -\frac{1}{2}$. Dann ist $w(z_1) = \mu_{-a}((\frac{1}{2})^2) = \mu_{-a}((-\frac{1}{2})^2) = w(z_2)$, aber $z_1 \neq z_2$.

12. Ausblick

Nicht (oder fast nicht) behandelte Themen:

Teil I Differentialgleichungen

- Stabilitätstheorie
- periodische Differentialgleichungen
- orthogonale Polynome; spezielle Funktionen
- selbstadjungierte Randwertprobleme (Spektraltheorie, Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen)

Teil II Funktionentheorie

- unendliche Produkte
- die Gamma-Funktion
- die Zeta-Funktion und die Verbindung zur Zahlentheorie (Primzahlsatz)
- Fundamentalgruppen
- Riemannsche Flächen
- konforme Abbildungen

Analysis insgesamt

- Fixpunktsätze
- Differentialgeometrie; globale Analysis
- Konvergenzsätze für Integrale (→ Maßtheorie) (A IV)
- Topologie (A IV)
- Differentialformen
- L^p-Räume (A IV)
- Fourier-Transformation (A IV)